A sztochasztika alapjai

5. feladatsor: véletlen változók, várható érték, kovariancia

1. A $(0,1)$ intervallumon találomra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Mekkora a valószínűsége, hogy a középső pont a $(1/4, 1/3)$ intervallumba esik?

2. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Legyen ξ a pontnak a négyzet határától vett távolsága. Adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását!

3. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1,1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!

4. Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4}, & \text{ha } x \geq 10, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg a szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

5. Legyen a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$.

(a) Határozzuk meg c értékét!

(b) Adjuk meg ξ várható értékét (ha létezik)!

(c) Mennyi $\mathbf{P}(\xi > 4)$?

(d) Legyen $\eta = 1/\xi$. Adjuk meg η eloszlás–, és sűrűségfüggvényét!

6. A Bergengóc Élettani Kutatási Alap kifejlesztett egy egydózisú vakcinát a Covid-$\pi^2/6$ vírus ellen. A BÉKA vakcina a beadást követően azonnali védelmet biztosít egy véletlen ξ ideig, ahol ξ hónapokban mért sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{8}, & x \in [5,9], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a BÉKA vakcina fél év után még hatásos? Adjuk meg ξ védettségi idő várható értékét és szórását!

7. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Jelölje ξ azt az időt amennyit a hamarabb végző lány vár a másikra! Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását!

8. Egy urnában a fehér és b piros golyó van. Az első fehér golyóig húzunk visszatevés nélkül. Legyen ξ az első fehérig húzott pirosak száma. Adjuk meg ξ eloszlását, várható értékét!

9. Jelölje S_n a fixpontok számát n elem véletlen permutációja során! Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását! (Segítség: Ne próbáljuk meghatározni az eloszlást.)

10. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

11. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevéssel. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

12. Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor egymás után. Határozzuk meg az egymást követő fej–fej dobások számának várható értékét!

13. Kupongyűjtő probléma. Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különböző elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget.

Útmutatás: Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót.

14. Francia kártyából kihúzunk 20 lapot visszatevéssel. Határozzuk meg a különböző lapok számának várható értékét és szórásnégyzetét!

15. Egy halastóban N hal van. Kihalászunk M halat, megjelöljük őket, és visszaeresztjük a tóba. Bizonyos idő elteltével, miután jól elkeveredtek, kihalászunk n-et. Ezek között legyen a megjelöltek száma ξ. A teljes halállomány N meghatározására az $Mn/(\xi+1)$ becslést használjuk. Számítsuk ki ennek a várható értékét és szórását! Miért nem a logikusabb Mn/ξ becslést használjuk?

16. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt érnek, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

(a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan mennyit ér portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?

(b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és szórásnégyzetét!

(c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

17. Egy vállalat egy hónapra eső profitja a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is véletlen változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó profit várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a profit várható értékét és szórásnégyzetét!