A sztochasztika alapjai

4. feladatsor: függetlenség, véletlen változók

1. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

2. Francia kártyapakliból véletlenszerűen húzunk egy lapot. Jelölje D azt az eseményt, hogy dámát húzunk, K pedig azt, hogy kőrt. Függetlenek-e D és K? (A francia kártyánál 52 lap van, 4 szín (kőr, káró, pikk, treff), 13 figura (Á, 2 - 10, J, D, K).)

3. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

4. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

5. Egy dobókockával n-szer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első m dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy az n dobás közt nincs egyes, $m < n$. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

6. A sztochasztika tanszék egyik oktatója az óra során elhasznált kréták kis darabjait 1 méter távolságból a szemetesbe dobja. A dobások egymástól függetlenül 95% eséllyel találnak. Ha egy gyakorlat alatt pontosan 6-szor próbálkozik, mennyi a valószínűsége, hogy mindig talál? Hányadik gyakorlaton lesz először 0.5-nél nagyobb annak a valószínűsége, hogy (az összes eddigi dobása közül) legalább egyszer nem talál?

7. Válasszunk találomra az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.

(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1 p_2 | n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.

(b) Igazoljuk, hogy

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

8. A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással. A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket. (A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.) Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?

9. Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk. Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét és szórását!

10. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Jelölje X a szükséges próbálkozások számát. Adjuk meg X eloszlását, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi;

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre.

11. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után háromszor. Jelölje X a dobott fejek és a dobott írások számának a különbségét. Határozzuk meg X eloszlását és eloszlásfüggvényét (készítsünk ábrát is)! Mi a valószínűsége, hogy X a $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ intervallumba esik?

12. Egy hallgató 26 tétel közül 16-ot jelesre tud, 8-at jóra, 2-t viszont csak közepesre. A vizsgatételek kiválasztásakor 26 tétel közül húz 1-et. Adjuk meg a kapott jegy értékének eloszlását, várható értékét és szórását!

13. Ötöslottón egy szelvénnyel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!

14. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám eloszlását!

15. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

16. Máté nagymamája meggylevest készít a vasárnapi ebédhez. Összesen 5 szem szegfűszeget tesz a levesbe. A levest 4 egyforma adagra osztják. Adjuk meg Máté levesében található szegfűszegek számának eloszlását, várható értékét, és szórását!

17. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kiveszek 4 cipőt. Jelölje X a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

18. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását?

19. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje X a második piros sorszámát. Adjuk meg X eloszlását!

20. Bence addig rugdos egy labdát egy 10 m hosszú és 5 m magas háznak, amíg el nem talál egy ablakot. A házon két 2 m $\times$ 1,5 m-es ablak van. Jelölje ξ az első ablakot találó rúgás sorszámát. Adjuk meg ξ eloszlását!