A sztochasztika alapjai

3. feladatsor: Feltételes valószínűség

1. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

2. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha

(a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;

(b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;

(c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;

(d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

3. Magyar kártyából kapunk 12 lapot, a másik két játékos 10–10 lapot kap. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 5 pirosat kapunk, közte a piros hetest? Feltéve, hogy pontosan 5 pirosat kaptunk közte a piros hetest, mennyi a valószínűsége, hogy a másik 3 piros egy kézben van?

4. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

5. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge. A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a. Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

6. A koronavírus teszt hatékonysága függ attól, hogy a fertőzött hány napja kapta el a betegséget. Tegyük fel, hogy a fertőzés minden esetben 12 napig tart (ez kb. igaz, ezért van 14 nap karantén). Ha a fertőzött $1-3$ napja kapta el a betegséget, akkor a teszt ezt nem tudja kimutatni, ha $4-5$ napja, akkor $0,5$ valószínűséggel mutatja ki, ha $6-12$ napja, akkor $0,75$ valószínűséggel (ez nagyjából stimmel). Feltehetjük, hogy egy fertőzött egyén az elmúlt 12 nap bármelyikén egyforma valószínűséggel fertőződött meg.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött egyén tesztje negatív?

(b) Mivel ez így nem túl hatásos, a következő a szokásos eljárás. A vizsgálandó egyént letesztelik, majd karanténba küldik (ahol elvileg nem fertőződhet meg), és két nap múlva újra letesztelik. Csak akkor engedik ki a karanténból, ha mindkét tesztje negatív. Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött mindkét tesztje negatív, és még mindig fertőző? (Vegyük észre, hogy a betegünk a második teszt után meggyógyulhatott, ha elég régen fertőződött meg.)

7. Aladár hétfő reggelenként 7:15-kor indul el otthonról, hogy 8:00-ra beérjen az egyetemre. Gyalog kimegy a buszmegállóba, 20 percet buszozik, aztán villamosra száll át, amelyen 15 percet utazik, végül ismét gyalogol az egyetemig. A buszon 0,5, a villamoson pedig 0,2 valószínűséggel hallja meg, ha csörög a mobiltelefonja, míg gyaloglás közben biztosan észreveszi, ha hívják. Ha hétfő reggel 7:15 és 8:00 között egy véletlen időpontban felhívjuk, és felveszi a telefonját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy épp villamoson van?

8. Két pénzérme közül az egyik szabályos, a másik cinkelt, 1/4 valószínűséggel ad fejet. Véletlenszerűen kiválasztjuk az egyiket, majd ezzel kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két fejet kapunk? Ha két fejet kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottuk?

9. Jókedvében Mátyás király kegyelmet ajánl velencei rabjának, ha a rab két egyforma urna közül az egyikből kihúz egy ezüstgolyót. Megengedi neki, hogy 50 ezüst- és 50 aranygolyót úgy osszon el a két urnába, ahogy akarja. Ezután Mátyás udvari bolondja találomra választ egy urnát, a rab pedig abból találomra egy golyót. Hogyan ossza el a rab a két urnába a golyókat, ha kedves az élete? Ekkor mekkora az esélye a szabadulásra?

10. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $\lambda h + o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött!

11. Egy fiú és egy lány megbeszéli, hogy két utca kereszteződésénél találkoznak egy meghatározott időpontban. Elfelejtik megbeszélni, hogy a négy sarok közül melyiknél várnak egymásra. Az útkereszteződés nagyon forgalmas, nem lehet átlátni a többi sarokra. Mindketten pontosan érkeznek, és ha a másik nincs ott, akkor 2,5 perc után átmennek a szomszédos sarkok valamelyikére, 1/2–1/2 valószínűséggel. Ez fél percet vesz igénybe, majd ha megint nem találkoztak, akkor 2,5 perc után megint sarkot váltanak. Először mindketten 1/4 valószínűséggel választanak sarkot. Természetesen az is találkozásnak számít, ha egymással szembe jönnek az úttesten.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első percen belül találkoznak?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy az első $3n$ percen belül találkoznak?

(c) Mennyi annak az r_n valószínűsége, hogy pontosan a $3n$-edik percben találkoznak?

(d) Igazoljuk, hogy egy valószínűséggel véges időn belül találkoznak.

12. Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, megegyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 100 dobásból pontosan 50 sikeres?

13. Egy százszemélyes repülőgépen száz ember utazik úgy, hogy mindenkinek van előre kiosztott helye. Az első utas ezzel nem törődve véletlenszerűen leül a száz közül egy helyre. Ezután minden utas a saját helyére próbál leülni, vagy ha az foglalt, véletlenszerűen választ egy másikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a századik utas a helyére ül, ha egyszerre csak egy ember foglal helyet?

14. A parti tüzérség 1 km távolságban felfedez egy ellenséges cirkálót, és elkezd rá tüzelni, percenként egy lövést adva le. A cirkáló az első lövés leadásakor menekülni kezd 60 km/h sebességgel. A találat valószínűsége x km távolság esetén $0,75\,x^{-2}$. Ha egy lövés talált, akkor még mindig 1/4 valószínűséggel a cirkáló nem süllyed el, és tovább menekül. Mekkora valószínűséggel menekül el a cirkáló?