**A sztochasztika alapjai**

*2. feladatsor: Szita formula, kombinatorikus és geometriai valószínűség*

**1.** Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készített!

**2.** Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát ültet egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két nyír?

**3.** Egy embernek $n$ egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a $k$-adik próbálkozása sikeres, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

**4.** Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

**5.** A Derelye pékség polcán 30 db mákos kifli van, melyek között vannak hibás termékek is. Ha két kiflit kiveszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mindkettő jó, $\frac{38}{9}$-szerese annak a valószínűségnek, hogy mindkettő hibás. Hány hibás mákos kifli van?

**6.** Az autók rendszámai 2022-ig 3 betűből (26 lehetséges betű közül) és 3 számból állnak. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott rendszám 3 különböző betűből és 3 különböző számból áll?

**7.** A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

**8.** A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegeik kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 kólát vásárolva sikerül kigyűjtenünk a három testvért? (Segítség: a kupakokra gondoljunk úgy mintha egy zsákból húznánk egy nevet, melyben Kevin háromszor, Joe kétszer, Nick pedig egyszer szerepel.)

**9.** Sorban elhelyezett $n$ dobozba találomra berakunk $N$ golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első $k$ doboz egyike sem üres?

**10.** Egy urnában $k$-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a $q_n$ valószínűsége, hogy legalább $n$ húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a $p_n$ valószínűsége, hogy $n$ húzás során minden szín előfordult, és ez az $n$-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

**11.** Egy labdát találomra nekirúgunk egy háznak, amely 10 m hosszú és 5 m magas. A házon két 2 m $\times$ 1,5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talál a labda?

**12.** Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint 1/4?

**13.** A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint 1/4?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint 1/2?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

**14.** Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

**15.** András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

**16.** Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?

**17.** Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

**18.** Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: $A, B, C, D$. Mennyi a valószínűsége, hogy az $AB$ és $CD$ húrok metszik egymást?

**19.** Egy kör kerületén válasszunk $n$ pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?