

A sztochasztika alapjai

1. feladatsor: valószínűségi mező, események, kombinatorikus valószínűség

1. Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Adjuk meg azt az eseményt, hogy (i) dobunk fejet; (ii) két fejet dobunk!
Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p !
2. Adjuk meg a *lottóhúzást* leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?
3. Egy szabályos érmét tízszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p !
4. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy 16-nél nagyobb a dobott számok összege? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt!
5. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!
 - (a) Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be.
 - (b) Az A, B, C események közül legalább k következik be.
 - (c) Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.
6. Igazoljuk, hogy egy σ -algebra zárt a metszet-, és különbségképzésre; azaz ha \mathcal{A} σ -algebra, és $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
7. Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18. Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót húzunk $1/15$ -del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége viszont, hogy kék vagy piros golyót húzunk $11/10$ -szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Hány zöld és hány kék golyó van az urnában?
8. Egy szabályos kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő 1, 2, 3, 4, 5, 6 eredményesorozat nem fordul elő?
9. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?
10. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?
11. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?

12. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

13. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

14. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

15. Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi. Mekkora a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

16. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 0, 19, 0, 25, illetve 0, 28 valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy 0, 05, hogy az első és a harmadik is csődbe megy 0, 1, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is 0, 1. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

17. Máté nagymamája meggylevest készít a vasárnapi ebédhez. Összesen 5 szem szegfűszeget tesz a levesbe. A levest 4 egyforma adagra osztják. Mennyi a valószínűsége, hogy Máté levesében nem lesz szegfűszeg? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 szegfűszeg lesz a levesében?

18. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatíratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

19. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthál van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthál). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthál megússza a horgászkalandot?