A sztochasztika alapjai
MBNXK262

9. előadás: Nevezetes eloszlások, nagy számok törvényei

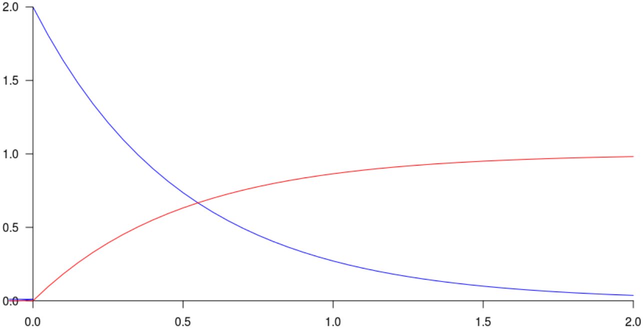
Kevei Péter

2022/23 tavasz

Exponenciális eloszlás

ξ *λ-paraméterű exponenciális eloszlású*, $\xi \sim$ Exp(λ), $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Momentumok

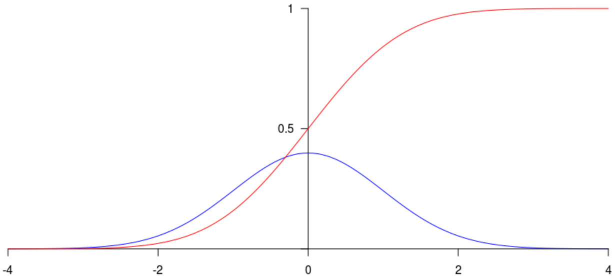
Örökifjú

- telefonhívás hossza
- várakozási idő
- alkatrészek élettartama
- üvegpohár élethossza

Normális eloszlás

ξ *normális eloszlású* μ *és* σ^2 *paraméterekkel*, $\xi \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu,\sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$


1
0.5
-4
-2
0
2
4

Momentumok

Standardizálás

Állítás

Ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$*, akkor* $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

Standard normális eloszlásfüggvény

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, \quad x \geq 0$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

$\xi \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ és $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\xi - \mu| \leq \lambda\sigma) &= \mathbf{P}(|Z| \leq \lambda) \\ &= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\ &= 2\Phi(\lambda) - 1 \\ &= \begin{cases} 0,6827, & \lambda = 1, \\ 0,9545, & \lambda = 2, \\ 0,9973, & \lambda = 3, \\ 0,9999, & \lambda = 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Egyenlőtlenségek

Tétel (Markov-egyenlőtlenség)

Legyen ξ *egy véletlen változó* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mezőn, melynek véges a várható értéke. Ekkor tetszőleges pozitív c konstansra*

$$\mathbf{P}(|\xi| \geq c) \leq \frac{\mathbf{E}(|\xi|)}{c}.$$

Egyenlőtlenségek

Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség)

Legyen ξ *egy véletlen változó* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mezőn, melynek véges a szórása. Ekkor tetszőleges pozitív c konstansra*

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}(\xi)| \geq c) \leq \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{c^2}.$$

Nagy számok törvénye

Tétel (Csebisev-féle nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, véges szórású véletlen változók, melyek közös várható értéke μ és szórásnégyzete σ^2. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Tétel (Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye (1713))

Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát egy kísérlet n független ismétlése során. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

CHT

Tétel (Centrális határeloszlás-tétel)

Legyenek $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású véletlen változók közös* $\mathbf{E}(\xi) = \mu$ *várható értékkel, és véges* $\mathbf{D}(\xi) = \sigma$ *szórással. Ekkor tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) = \Phi(x),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Tétel (de Moivre–Laplace tétel)

Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát egy kísérlet n független ismétlése során. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Példa

A kakucsretyegei polgármesterválasztáson két jelölt van: A és B. Kakucsretyege 40000 szavazója egymástól függetlenül, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel szavaz a két jelölt egyikére. A feszült politikai helyzet miatt a szavazatok újraszámlálását rendelik el, ha a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 100 a különbség. Mi a valószínűsége, hogy újraszámlálásra kerül sor?

Példa

Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$?