# A sztochasztika alapjai
# MBNXK262

## 8. előadás: Nevezetes eloszlások

Kevei Péter

2022/23 tavasz

# Beszúró rendezés

Kapunk egy $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ valós számokból álló vektort.
Cél: $U$ elemeinek sorbarendezése növekvő sorrendben, azaz az elemek azt a permutációját, melyre $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$.

# Beszúró rendezés

A már rendezett $i$ elem közé a megfelelő helyre beszúrja az $a_{i+1}$ elemet. Ezt megcsinálja $i = 1$-től $i = (n-1)$-ig.
Példa: $U = (4, 2, 3, 1)$.

# Milyen gyors?

Legrosszabb eset:

Legjobb eset:

# Átlagos eset

- Az átlagos esetet egy véletlen bemeneten a összehasonlítások számának várható értéke adja.
- Tegyük fel, hogy az $U$ elemeinek $n!$ lehetséges permutációja egyformán valószínű. Azaz

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, n \quad \text{permutációi}\},$$

  $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, $\mathbf{P}(A) = |A|/n!$.
- $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ a szükséges összehasonlítások száma
- Keressük: $\mathbf{E}(\xi) = ?$

# Átlagos eset

$\eta_i$ az *i*-edik lépésben végzett összehasonlítások számát.

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1}.$$

# Átlagos eset

# Nevezetes eloszlások: Bernoulli-eloszlás

$\xi$ véletlen változó *p paraméterű Bernoulli-eloszlású*,
$\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1$, és
$\mathbf{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$.

# Nevezetes eloszlások: Binomiális eloszlás

Az $\xi$ véletlen változó $(n, p)$ paraméterű binomiális eloszlású, $\xi \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

# Bernoulli és binomiális

## Állítás

*Legyenek $I_1, \ldots, I_n$ független, Bernoulli$(p)$ eloszlású véletlen változók. Ekkor $\sum_{i=1}^n I_i$ binomiális eloszlású $(n, p)$ paraméterekkel.*

# Geometriai eloszlás

Az $\xi$ véletlen változó *p paraméterű geometriai eloszlású*, $\xi \sim \text{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \ldots$ és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tipikus példa: addig ismétlünk egy kísérletet, amíg a vizsgált $A$ esemény be nem következik.
Diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi > k + \ell | \xi > k) &= \frac{\mathbf{P}(\xi > k + \ell)}{\mathbf{P}(\xi > k)} \\ &= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}(\xi > \ell).\end{aligned}$$

# Nevezetes eloszlások: Poisson-eloszlás

$\xi$ $\lambda$ *paraméterű Poisson-eloszlású*, $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, ha $\xi$ lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

# Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

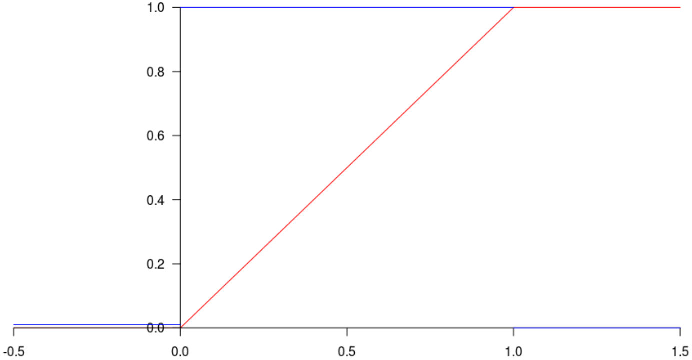
Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- téves telefonhívások száma;
- autóbalesetek száma;
- nyomdahubák száma egy oldalon;
- földrengések száma;
- csillagok száma egy adott térrészben;
- mazsolák száma a pudingban.
- halálos lórúgások száma egy év alatt a porosz hadseregben (Bortkiewicz)

# Egyenletes eloszlás

$\xi$ *egyenletes eloszlású az* $(a, b)$ *intervallumon*, $\xi \sim \text{Egy}(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye

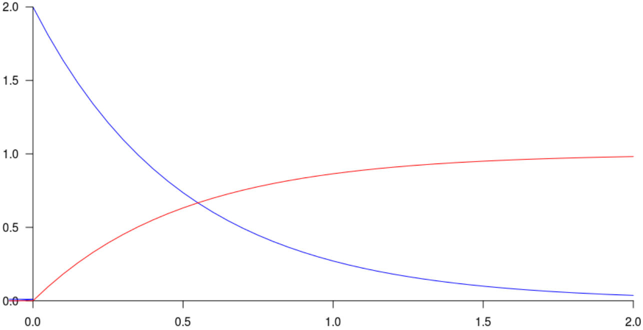
$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } y \in (a, b), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

# Exponenciális eloszlás

$\xi$ $\lambda$-*paraméterű exponenciális eloszlású*, $\xi \sim$ Exp($\lambda$), $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$



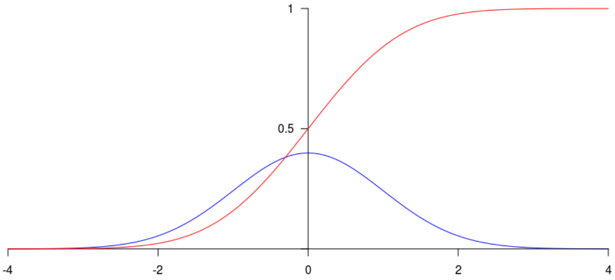
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

# Momentumok

# Normális eloszlás

$\xi$ *normális eloszlású* $\mu$ *és* $\sigma^2$ *paraméterekkel*, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu,\sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



1
0.5
-4
-2
0
2
4

# Standardizálás

## Állítás

*Ha* $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$*, akkor* $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$*.*

$\xi \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ és $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|\xi - \mu| \leq \lambda\sigma) &= \mathbf{P}(|Z| \leq \lambda) \\
&= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\
&= 2\Phi(\lambda) - 1 \\
&= \begin{cases} 0{,}6827, & \lambda = 1, \\ 0{,}9545, & \lambda = 2, \\ 0{,}9973, & \lambda = 3, \\ 0{,}9999, & \lambda = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

## Példa

A sztochasztika alapjai kurzus 400 hallgatójának mindegyike bemegy az első előadásra. Ezt követően minden hallgató minden további előadás előtt feldob egy szabályos pénzérmét. Ha fejet kap, akkor bemegy a következő előadásra, ha írást akkor nem, és utána már egyetlen előadásra sem megy be. Véletlen Vince a 400 hallgató egyike. Mennyi a valószínűsége, hogy Vince az összes előadásra bemegy? Várhatóan hány előadáson vesz részt? Mennyi a valószínűsége, hogy a 12. (utolsó) előadáson lesz hallgató? Várhatóan hány hallgató lesz a 2., 3., utolsó előadáson?

# Kupongyűjtő probléma

### Példa

Egy $N$ különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje $S_r$ azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk $r$ különböző elemet. Határozzuk meg $S_r$ várható értékét, szórását!

# Kupongyűjtő probléma

Legyen $\xi_k = S_{k+1} - S_k$ változót, $S_0 = 0$.