# A sztochasztika alapjai
# MBNXK262

## 6. előadás: Szórás, kovariancia, korreláció

Kevei Péter

2022/23 tavasz

# Várható érték

## Definíció

Ha $\xi$ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az $\xi$ *várható értéke*

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$.

# Huffman-kód

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ véges halmaz, a *forrásábécé*.
Kód $f : \mathcal{X} \to \{$véges 0-1 sorozatok $\}$
Az $f$-hez tartozó lehetséges kódszavak $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.

# Huffman-kód

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ véges halmaz, a *forrásábécé*.
Kód $f : \mathcal{X} \to \{$véges 0-1 sorozatok $\}$
Az $f$-hez tartozó lehetséges kódszavak $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.
Az $f$ kód *prefix*, ha a lehetséges kódszavak közül egyik sem folytatása a másiknak. Jelölje $x \in \mathcal{X}$ esetén $|f(x)|$ a kódszó hosszát.

## Példa

Legyen $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$, és legyen $f_1(a) = 0$, $f_1(b) = 01$, $f_1(c) = 011$. Ekkor $f_1$ nem prefix kód, de könnyen látható, hogy egyértelműen dekódolható. Az $f_2(a) = 01$, $f_2(b) = 00$, $f_2(c) = 1$, kód prefix.

Legyen $X$ egy véletlen betű, és eloszlása $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tehát $p_k$ a $x_k$ betű gyakorisága az adott nyelvben.

Adott $f$ kód esetén egy hosszú szövegben az egy karakterre eső átlagos kódszóhossz:

Feltehető, hogy $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$. Ha az $f$ prefix kód optimális, akkor feltehető, hogy teljesülnek a következők:

(i) Hosszabb kódhoz ritkább betűk tartoznak, azaz

$$|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \ldots \leq |f(x_n)|.$$

Feltehető, hogy $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$. Ha az $f$ prefix kód optimális, akkor feltehető, hogy teljesülnek a következők:

(i) Hosszabb kódhoz ritkább betűk tartoznak, azaz

$$|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \ldots \leq |f(x_n)|.$$

(ii) A két legkisebb valószínűséghez tartozó kód hossza egyenlő.

Feltehető, hogy $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$. Ha az $f$ prefix kód optimális, akkor feltehető, hogy teljesülnek a következők:

(i) Hosszabb kódhoz ritkább betűk tartoznak, azaz

$$|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \ldots \leq |f(x_n)|.$$

(ii) A két legkisebb valószínűséghez tartozó kód hossza egyenlő.

(iii) $f(x_{n-1})$ és $f(x_n)$ csak az utolsó bitben térnek el.

## Tétel

*Tegyük fel, hogy az*

$$\mathcal{X}' = \{x_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-1}\}$$

$(n-1)$ *elemű forrásábécé és* $p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} + p_n$ *eloszlás esetén* $g$ *egy optimális prefix kód. Ekkor az eredeti problémához tartozó optimális prefix kódot kapunk, ha az* $x_{n-1}$*, ill.* $x_n$ *kódját úgy választjuk, hogy a* $g(y_{n-1})$ *kódszót kiegészítjük 0-val, ill. 1-gyel, a többi kódszót változatlanul hagyjuk.*

## Példa

Legyen $n = 6$, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_6\}$, és $p_1 = 0.132$, $p_2 = 0.329$, $p_3 = 0.329$, $p_4 = 0.165$, $p_5 = 0.041$, $p_6 = 0.004$.

(i) $x_5, x_6 \to x_{56}$, $p_{56} = 0.045$;

## Példa

Legyen $n = 6$, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_6\}$, és $p_1 = 0.132$, $p_2 = 0.329$, $p_3 = 0.329$, $p_4 = 0.165$, $p_5 = 0.041$, $p_6 = 0.004$.

(i) $x_5, x_6 \to x_{56}$, $p_{56} = 0.045$;

(ii) $x_1, x_{56}$, $p_{156} = 0.177$;

## Példa

Legyen $n = 6$, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_6\}$, és $p_1 = 0.132$, $p_2 = 0.329$, $p_3 = 0.329$, $p_4 = 0.165$, $p_5 = 0.041$, $p_6 = 0.004$.

(i) $x_5, x_6 \to x_{56}$, $p_{56} = 0.045$;

(ii) $x_1, x_{56}$, $p_{156} = 0.177$;

(iii) $x_{156}, x_4$, $p_{1564} = 0.342$;

## Példa

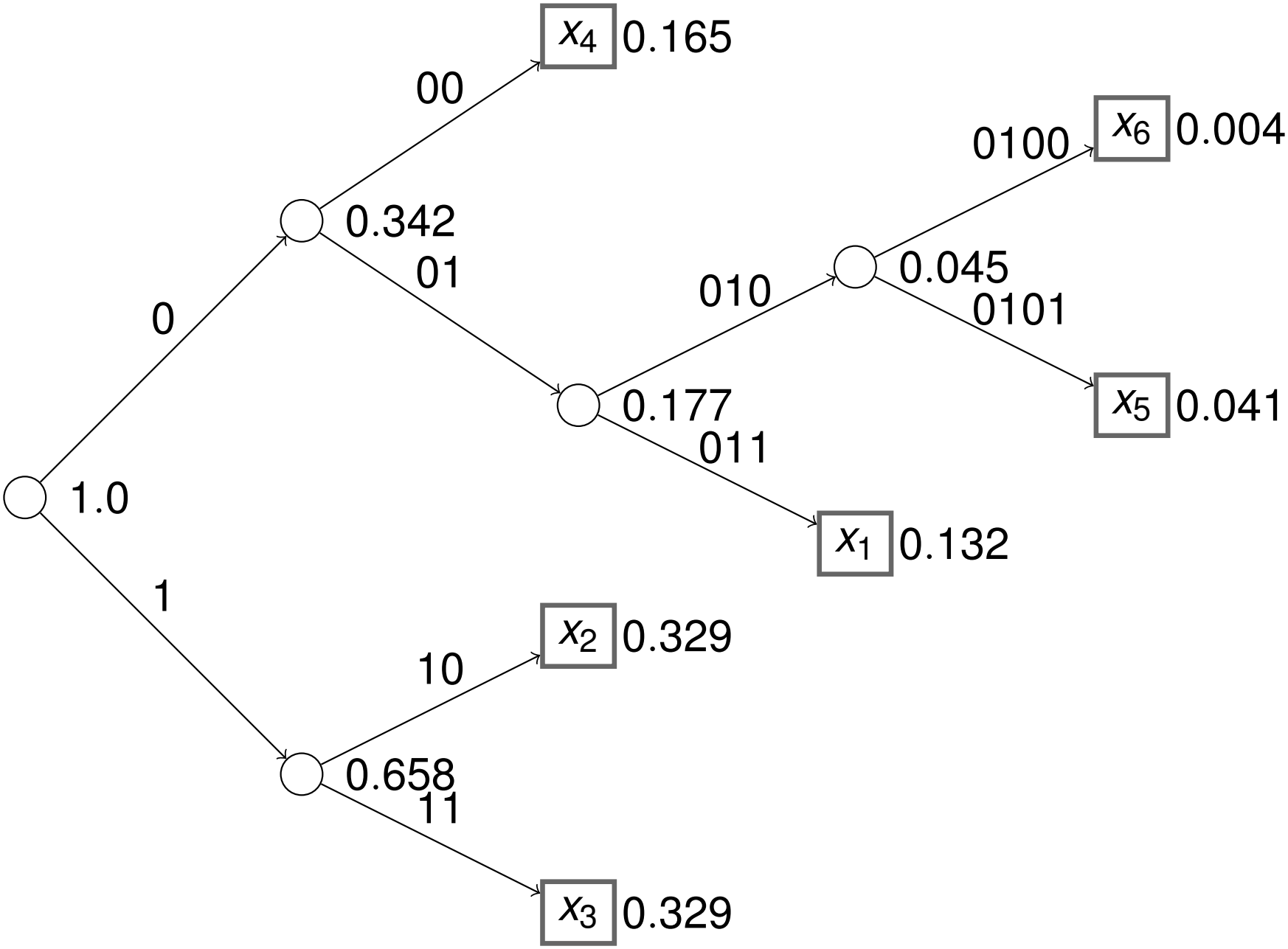
Legyen $n = 6$, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_6\}$, és $p_1 = 0.132$, $p_2 = 0.329$, $p_3 = 0.329$, $p_4 = 0.165$, $p_5 = 0.041$, $p_6 = 0.004$.

(i) $x_5, x_6 \to x_{56}$, $p_{56} = 0.045$;

(ii) $x_1, x_{56}$, $p_{156} = 0.177$;

(iii) $x_{156}, x_4$, $p_{1564} = 0.342$;

(iv) $x_2, x_3$, $p_{23} = 0.658$.


$x_4$ 0.165
00
$x_6$ 0.004
0100
0.342
01
0.045
010
0101
0
0.177
$x_5$ 0.041
011
1.0
$x_1$ 0.132
1
$x_2$ 0.329
10
0.658
11
$x_3$ 0.329

Így az optimális kód:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 011 | 10 | 11 | 00 | 0101 | 0100 |
| 0.132 | 0.329 | 0.329 | 0.165 | 0.041 | 0.004 |

A várható érték:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(X)) &= 0.132 \cdot 3 + 0.329 \cdot 2 + 0.329 \cdot 2 \\ &\quad + 0.165 \cdot 2 + 0.041 \cdot 4 + 0.004 \cdot 4 = 2.22\end{aligned}$$

# Entrópia

Az optimális várható kódhosszra teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \leq \mathbf{E}(|f(\xi)|) < \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 \frac{1}{p_k} + 1.$$

Pl.: JPEG, MP3.

# Momentumok

## Definíció

Az $\xi$ véletlen változó $k$-adik momentuma $\mathbf{E}(\xi^k)$, és $k$-adik centrális momentuma $\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}\xi)^k]$, $k = 1, 2, \ldots$.

$$\mathbf{E}(\xi^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k \mathbf{P}(\xi = x_i), & \text{ha } \xi \text{ diszkrét,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x, & \text{ha } \xi \text{ folytonos.} \end{cases}$$

# Szórás

## Definíció

Az $\xi$ véletlen változó szórása $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2}$.

# Szórás tulajdonságai

## Állítás

*Tetszőleges $\xi$ véletlen változó és $a, b$ valós számok esetén*

(i) $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2$;

(ii) $\mathbf{D}^2(a\xi + b) = a^2\mathbf{D}^2(\xi)$;

(iii) $\mathbf{D}(\xi) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\xi = \mathbf{E}(\xi)$, *azaz* $\xi$ *konstans véletlen változó.*

# Szórás tulajdonságai

# Kovariancia, korreláció

## Definíció

Az $\xi$ és $\eta$ véletlen változók *kovarianciája*

$$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))(\eta - \mathbf{E}(\eta))],$$

*korrelációja*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)}.$$

# Tulajdonságok

## Állítás

*Tetszőleges* $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *véletlen változók és* $a, b$ *valós számok esetén igazak az alábbiak.*

(i) $\mathbf{Cov}(\xi, \xi) = \mathbf{D}^2(\xi)$;

(ii) $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{Cov}(\eta, \xi)$;

(iii) $\mathbf{Cov}(a(\xi + c), b(\eta + d)) = ab\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$;

(iv) $\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \sum_{j=1}^{m} \eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Cov}(\xi_i, \eta_j)$;

(v) *ha* $\xi$ *és* $\eta$ *függetlenek, akkor* $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

## Állítás

(i) *Bunyakovszkij–Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség:*

$$|\mathbf{Cov}(\xi,\eta)| \le \mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta).$$

*Innen adódik, hogy* $\rho(\xi,\eta) \in [-1,1]$*;*

(ii) *ha* $\rho(\xi,\eta) = 1$*, akkor*

$$\xi = \mathbf{E}(\xi) + \frac{\mathbf{D}(\xi)}{\mathbf{D}(\eta)}(\eta - \mathbf{E}(\eta));$$

(iii) *ha* $\rho(\xi,\eta) = -1$*, akkor*

$$\xi = \mathbf{E}(\xi) - \frac{\mathbf{D}(\xi)}{\mathbf{D}(\eta)}(\eta - \mathbf{E}(\eta)).$$

# Összeg szórásnégyzete

## Állítás

*Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként független véletlen változók. Ekkor*

$$\mathbf{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}^2(\xi_i).$$

# Összeg szórásnégyzete

Legyenek $\xi, \eta$ véletlen változók, $\rho$ a korrelációjuk. Ekkor

$$\mathbf{D}^2(\xi + \eta) =$$

# Kovariancia

## Példa

Egy szabályos dobókockával $n$-szer dobunk. Jelölje $\xi$ a hatosok, $\eta$ egyesek számát! Adjuk meg a várható értéket, szórást, kovarianciát, korrelációt!

Legyen $I_i = 1$, ha az $i$-edik dobás hatos, különben 0, $J_i = 1$, ha az $i$-edik dobás egyes, különben 0, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nyilván

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \text{és} \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} J_i.$$

# Lineáris regresszió

$(\xi, \eta)$ véletlen vektorváltozó. Az $\eta$ változót tekintem *függő* változónak, ennek az értékére szeretnék következtetni a $\xi$ *független változó* értékéből. Vagyis ismert $\xi$ esetén szeretném megmondani $\eta$-t. Keressük azokat az $a, b$ valós számokat, melyre a $\eta - (a\xi + b)$ változó kicsi. A kicsiséget négyzetes hibában mérve, keressük az

$$E(a, b) = \mathbf{E}\left[(\eta - (a\xi + b))^2\right]$$

függvény minimumhelyét, azaz a legjobb $a, b$ választást.

# Lineáris regresszió

$$\mathbf{E}\left[(\eta - (a\xi + b))^2\right] =$$

# Lineáris regresszió