A sztochasztika alapjai
MBNXK262

4. előadás: Véletlen változók

Kevei Péter

2022/23 tavasz

Véletlen változó

Definíció

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt. Az

$$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt *véletlen változónak* nevezzük, ha a

$$\xi^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega : \xi(\omega) < a\}$$

inverzkép $\mathcal{A}$-beli tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén.

- dobókockával dobott szám értéke;
- három kockával dobunk, akkor a legkisebb dobott szám;
- az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám;
- egy szelvényen elért találatok száma;
- hol törik el a ropi;
- egységnégyzetben egyenletesen választott pont milyen távol van a négyzet határától

Eloszlásfüggvény

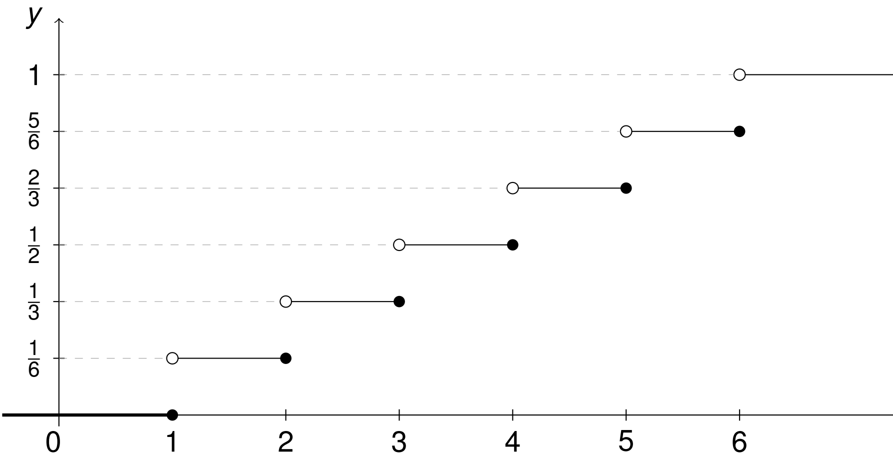
Definíció

A ξ véletlen változó *eloszlásfüggvénye* az

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \ x \in \mathbb{R},$$

függvény.

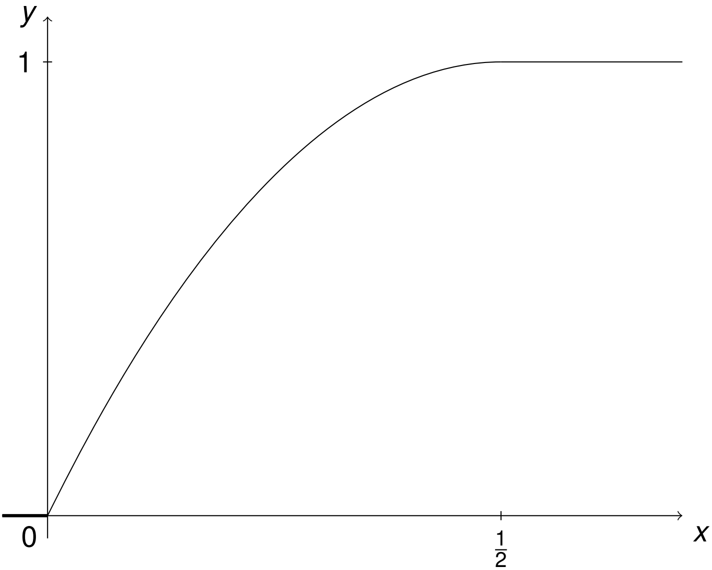
Dobókockával dobott szám



y
1
5/6
2/3
1/2
1/3
1/6
0
1
2
3
4
5
6

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

Eloszlásfüggvény



Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel (Eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Legyen $F(x)$ egy ξ véletlen változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

(i) *F monoton nemcsökkenő;*

(ii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *és* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$*;*

(iii) *F balról folytonos.*

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Monoton nemcsökkenő:

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Határértékek:

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Balról folytonosság:

Diszkrét véletlen változók

Definíció

Egy véletlen változó *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Ha egy diszkrét véletlen változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, akkor $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

Ha (p_i) eloszlás, akkor $\sum_i p_i = 1$. Az eloszlásfüggvény $F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i$.

Példa

Legyen ξ a dobókockán dobott szám értéke. Ekkor ξ lehetséges értékei $1, 2, \ldots, 6$, és

$$\mathbf{P}(\xi = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Példa

Legyen $\xi = I_A$ az A esemény indikátorváltozója. Azaz

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \notin A, \\ 1, & \text{ha } \omega \in A. \end{cases}$$

Ekkor ξ lehetséges értékei 0 és 1, és $\mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(A) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$. Ő a p paraméterű Bernoulli eloszlás.

Példa

Legyen $\xi = S_n$, egy kísérlet n-szeri ismétlése során az A esemény bekövetkezéseinek a száma. Ekkor X lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $p = \mathbf{P}(A) \in (0,1)$. Ő az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás.

Példa

Egy kísérletet addig ismétlünk, amíg egy adott A esemény be nem következik. Legyen ξ az elvégzett kísérletek száma. Ekkor ξ lehetséges értékei $1, 2 \ldots,$ és $\mathbf{P}(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$. Ő a p paraméterű geometria eloszlás.

Folytonos véletlen változók

Definíció

Egy ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy

$$\mathbf{P}(\xi \in (a,b)) = \mathbf{P}(\xi \in (a,b]) = \int_{a}^{b} f(y)\mathrm{d}y.$$

Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(\xi = x) = \int_{x}^{x} f(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Példa

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 4x(1-x), & \text{ha } 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & \text{ha } x \ge 1/2, \end{cases} \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}
$$

Véletlen vektorváltozók

Definíció

Az $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvény véletlen vektorváltozó, ha minden komponense véletlen változó. Az ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n).$$

Az $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ véletlen vektorváltozó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható, és folytonos, ha van olyan f nemnegatív n-változós függvény, melyre

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_n \ldots \mathrm{d}y_1$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ilyenkor az f függvényt az ξ vektorváltozó sűrűségfüggvényének nevezzük. Az ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, változók eloszlását, peremeloszlásnak, vagy marginális eloszlásnak nevezzük.

Vvv

Állítás

Legyen $f(u, v)$ az (ξ, η) véletlen vektor sűrűségfüggvénye. Ekkor ξ és η is folytonos véletlen változók $\int_{\mathbb{R}} f(u, v)\mathrm{d}v$ ill. $\int_{\mathbb{R}} f(u, v)\mathrm{d}v$ sűrűségfüggvénnyel.

Véletlen változók függetlensége

Definíció

Az $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek, ha minden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1) \ldots \mathbf{P}(\xi_n < x_n)$$

teljesül. Vagyis az együttes eloszlásfüggvény az egyes eloszlásfüggvények szorzata.

Függetlenség

Állítás

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *diszkrét véletlen változók úgy, hogy* ξ_i *lehetséges értékei* $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Ekkor* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *pontosan akkor függetlenek, ha*

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}) \ldots \mathbf{P}(\xi_n = x_{i_n}^{(n)})$$

teljesül tetszőleges $i_i, \ldots, i_n$ *indexekre.*
Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *együttesen folytonos véletlen változók* f *együttes sűrűségfüggvénnyel. Ekkor* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *pontosan akkor függetlenek, ha*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \ldots f_{\xi_n}(x_n),$$

ahol f_{ξ_i} *az* ξ_i *sűrűségfüggvénye.*

Függetlenség

Dobókockával 2-szer dobunk, ξ az első, η a második dobott szám. Ekkor ξ és η függetlenek.