A sztochasztika alapjai
MBNXK262

2. előadás: Szitaformula, geometriai valószínűség, feltételes valószínűség

Kevei Péter

2022/23 tavasz

A párosítási probléma

Feladat

Veszünk n darab kártyát 1-től n-ig megszámozva. Összekeverjük, és véletlen sorrendben lerakjuk őket egy sorba. A k-adik helyen párosítás történik, ha a k-adik helyre a k sorszámú kártya kerül. (Tehát véletlen permutációk fixpontjait tekintjük.)

Mennyi a valószínűsége, hogy nem történik párosítás? Jelölje p_n ezt a valószínűséget.

A párosítási probléma: a valószínűségi mező

- Eseménytér:

  $$\Omega = \{\text{az } \{1, \ldots, n\} \text{ halmaz permutációi}\}$$
  $$= \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \ : \ \omega_1, \ldots, \omega_n \text{ az } 1, 2, \ldots, n \text{ egy felsorolása}\},$$

  azaz egy $\omega \in \Omega$ esetén $1 \mapsto \omega_1$, $2 \mapsto \omega_2$, …, $n \mapsto \omega_n$.
  $|\Omega| = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!$.
- Események: $\mathcal{A} = 2^\Omega$ a hatványhalmaz.
- Valószínűségi mérték: $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}.$$

A párosítási probléma

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k-adik helyen párosítás történik, $k = 1, 2, \ldots, n$, és

$$A := \{\text{van párosítás}\}.$$

A párosítási probléma

A párosítási probléma

A párosítási probléma

A párosítási probléma

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab párosítás történik? Legyen

$$p_{n,k} = \mathbf{P}(n \text{ kártya van, és pontosan } k \text{ párosítás történik}).$$

A párosítási probléma

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab párosítás történik? Legyen

$$p_{n,k} = \mathbf{P}(n \text{ kártya van, és pontosan } k \text{ párosítás történik}).$$

Nyilván $p_n = p_{n,0}$. Jelölje $N_{n,k}$ azon kimenetelek számát, amikor pontosan k párosítás történik n kártyával. Ezekkel a jelölésekkel $p_m = N_{m,0}/m!$.

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \frac{N_{n,k}}{n!} = \frac{\binom{n}{k} N_{n-k,0}}{n!} = \frac{\binom{n}{k}(n-k)!p_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{p_{n-k}}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

A párosítási probléma

Az utóbbi alakból rögtön látjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Geometriai valószínűségi mező

Definíció

Geometriai valószínűségi mező esetén

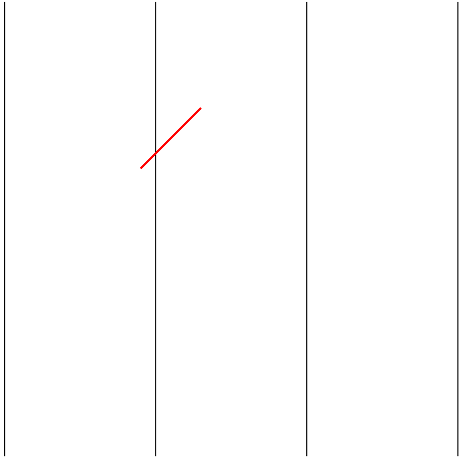
- a lehetséges kimenetelek halmaza $\Omega = H \subset \mathbb{R}^n$ szép halmaz, aminek a mértéke (hossza, területe, térfogata) pozitív és véges.
- az események $\mathcal{A}$ halmaza az Ω szép részhalmazai.
- egy $A \subset H$ esemény valószínűsége arányos a halmaz mértékével, azaz
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(H)},$$
ahol λ az n-dimenziós térfogat (hossz, terület, térfogat).

Példák: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\Omega = [0,1] \times [0,2]$,
$\Omega = B(0,1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Buffon-féle tűprobléma (1777)

Feladat

Egy padló mintázata párhuzamos egyenesekből áll. A szomszédos egyenesek távolsága d. A padlóra ledobunk egy ℓ hosszú tűt, ahol $\ell \leq d$. Mekkora a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

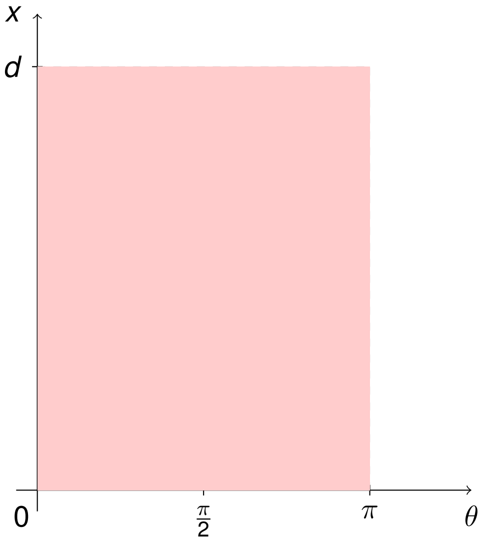


Buffon-féle tűprobléma

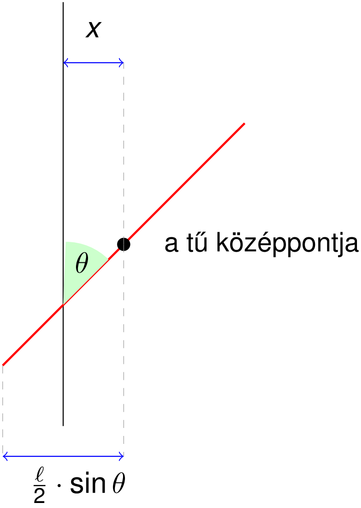
x a tű középpontjának és a hozzá legközelebbi, tőle balra levő egyenesnek a távolsága, $x \in [0, d]$;
$\theta \in [0, \pi)$ a tű függőlegessel bezárt szöge.

Buffon-féle tűprobléma

Az eseménytér Ω:

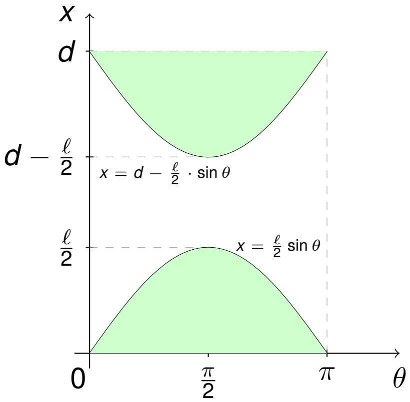


Buffon-féle tűprobléma



A tű akkor metszi a baloldali egyenest, ha $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}\sin\theta$, és akkor metszi a jobboldalit, ha $0 \leq d - x \leq \frac{\ell}{2}\sin\Theta$.

Buffon-féle tűprobléma



A kedvező terület:

$$2\int_0^\pi \frac{\ell}{2}\sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\ell,$$

így a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{ van metszés }) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Feltételes valószínűség

Definíció

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, és $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha annyi információnk van a véletlen kísérletről, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor az A esemény valószínűsége $\mathbf{P}(A|B)$.

Állítás

Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ *valószínűségi mérték* $\mathcal{A}$*-n.*

Állítás

Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$*.*
Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ *valószínűségi mérték* $\mathcal{A}$*-n.*

Állítás (Szorzási szabály)

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *tetszőleges olyan események, melyekre* $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$*. Ekkor*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = & \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \\ & \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

$n = 2$-re:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

Példa

Egy dobozban 12 kék és 3 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk két golyót egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkét golyó kék?
Jelölje K_i azt, hogy az i-edik kék. Ekkor

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) = \mathbf{P}(K_1)\mathbf{P}(K_2|K_1) = \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}.$$

Teljes eseményrendszer

Definíció

A $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n-re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$