

# A sztochasztika alapjai

## MBNXK262

1. előadás: Valószínűségi mező

Kevei Péter

2022/23 tavasz

# Követelmények

Gyakorlat: folyamatos számonkérésű kurzus

- ▶ részvétel kötelező (legfeljebb 3 hiányzás)
- ▶ 6 dolgozat, legjobb 5 számít
- ▶ nincs javítás
- ▶ nincs gyakorlati UV

Előadás: az vizsgázhat, aki teljesíti a gyakorlatot

- ▶ 12 db 5 pontos Coospace teszt
- ▶ megajánlott jegy: aki legalább 40 pontot szerez a teszteken, annak a 4-es, 5-ös gyakorlati jegyet megajánlom 3-as, 4-es vizsgajegynek
- ▶ írásbeli vizsga (elmélet + feladatok) 70%, Coospace tesztek 30%

# A kurzusról

Sztochasztika: véletlen matematikája, véletlen tömegjelenségek törvényszerűségei

Szükséges előismeretek:

- ▶ Kalkulus I. előfeltétel
- ▶ kombinatorika (középiskola, Diszkrét matematika II)
- ▶ műveletek halmazokkal (középiskola, DiMat I)

## Mihez kell?

- ▶ Alkalmazott statisztika tárgy előfeltétele
- ▶ mesterséges intelligencia (22/23 őszi MestInt tételsor 30 tétele közül 10 valszám)
- ▶ Neurális hálózatok, Gépi tanulás kurzusok
- ▶ algoritmusok futási idejének elemzése (véletlen input)
- ▶ információelmélet (üzenetküldés zajos csatornán)

# Segédanyag

- ▶ Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak, elektronikus jegyzet, előadás anyaga
- ▶ Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak feladatgyűjtemény, gyakorlatra feladatok, minden témában néhány részletes megoldásával
- ▶ Szabó Tamás, Szalai Máté, Szűcs Gábor: Youtube videók feladatmegoldásokról
- ▶ Viharos László: jegyzetvázlat
- ▶ Viharos László: A sztochasztika alapjai, Polygon

# Születésnap probléma

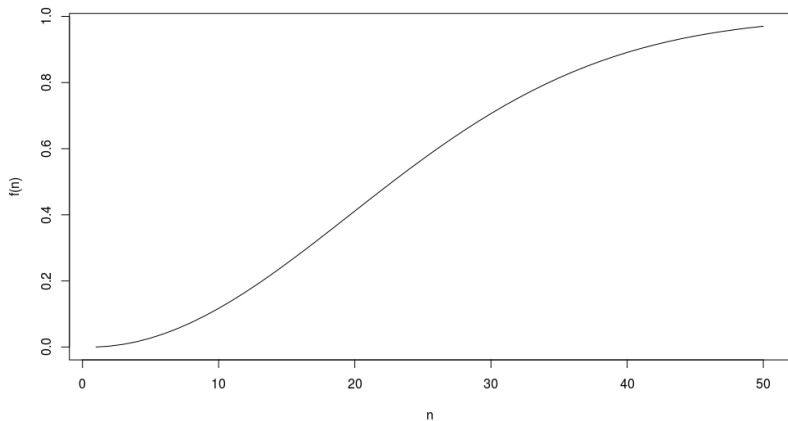
Mekkora a valószínűsége annak, hogy  $n$  ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?



$f(n) = \mathbf{P}(n \text{ ember között van } 2, \text{ akiknek}$   
 $\text{ugyanazon a napon van a születésnapja}).$

# Születésnap probléma

# Születésnap probléma





## Születésnap probléma - $N$ kimenetel

# Alapfogalmak

**Véletlen (valószínűségi) kísérlet:** lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele  $\Omega$ .

# Alapfogalmak

**Véletlen (valószínűségi) kísérlet:** lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele  $\Omega$ . Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** az  $\Omega$  részhalmazainak egy olyan rendszere, mely  $\sigma$ -algebra. Az  $(\Omega, \mathcal{A})$  párt mérhetőségi térnek nevezzük.

## Definíció

Egy  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  halmazrendszert akkor nevezünk  **$\sigma$ -algebrának**, ha

- ▶  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- ▶ valahányszor  $A \in \mathcal{A}$ , mindannyiszor  $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$  (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- ▶ valahányszor  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , mindannyiszor  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$  (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

# Megjegyzés

- ▶ Vegyük észre, hogy a  $\{\emptyset, \Omega\}$  halmazrendszer  $\sigma$ -algebra. Ez a triviális  $\sigma$ -algebra.
- ▶ A  $2^\Omega$  halmazrendszer, az  $\Omega$  hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazának halmaza is  $\sigma$ -algebra. Abban az esetben, amikor az  $\Omega$  alaphalmaz véges, akkor az események halmaza általában a hatványhalmaz.

# Események

Események jelölése:  $A, B, A_1, \dots$

- ▶  $|A| = 1 \Leftrightarrow A = \{\omega\}, \omega \in \Omega$ , elemi esemény
- ▶  $\emptyset$  a lehetetlen esemény
- ▶  $\Omega$  a biztos esemény
- ▶  $A^c$  az ellentett esemény
- ▶  $A \cap B$  mindkét esemény bekövetkezik ( $A$  és  $B$ )
- ▶  $A \cup B$  a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik
- ▶  $A \cap B = \emptyset$  a két esemény kizárja egymást
- ▶  $A \setminus B$  a bekövetkezik de  $B$  nem
- ▶  $A \subset B$  az  $A$  esemény maga után vonja  $B$ -t

## Példa

Földobunk egy pénzérmét. Lehetséges kimenetelek  $F$ ,  $I$ , tehát

$$\Omega = \{F, I\}.$$

Események

$$\mathcal{A} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{F\}, \{I\}, \{F, I\}\}.$$

Ekkor  $|2^\Omega| = 2^{|\Omega|} = 4$ . (Általában egy  $n$  elemű halmaznak  $2^n$  részhalmaza van.)

## Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz  $|\Omega| = 2^2 = 4$  darab elemi esemény van, és  $|2^\Omega| = 2^4 = 16$  az összes esemény száma és

$$\begin{aligned} 2^\Omega = \{ & \emptyset, \{(F, F)\}, \{(F, I)\}, \{(I, F)\}, \{(I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I)\}, \{(F, F), (I, F)\}, \{(F, F), (I, I)\}, \\ & \{(F, I), (I, F)\}, \{(F, I), (I, I)\}, \{(I, F), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I), (I, F)\}, \{(F, F), (F, I), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (I, F), (I, I)\}, \{(I, F), (F, I), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\} \}. \end{aligned}$$



## Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz  $|\Omega| = 2^2 = 4$  darab elemi esemény van, és  $|2^\Omega| = 2^4 = 16$ . Legyen  $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$ ,  $i = 1, 2$ .  
Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

Továbbá

$$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F, I)\} = A_1 \cap A_2^c$$

$$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I, I)\} = A_1^c \cap A_2^c$$

## Példa

Véletlen sorrendben leírjuk a MATEMATIKA szó betűit.

1. *megoldás:* Az azonos betűket nem különböztetjük meg.

$$\Omega = \{AAAEIKMMTT, AAAEIKMTMT, \dots, TTMMKIEAAA\}$$

$$|\Omega| = \frac{10!}{3!2!2!}$$

$A = \{\text{MATEMATIKA szót kapjuk}\} = \{\text{MATEMATIKA}\}$ , azaz  $A$  elemi esemény.

2. *megoldás:* Az azonos betűket megkülönböztetjük.

$$\Omega = \{A_1A_2A_3EIKM_1M_2T_1T_2, A_1A_2A_3EIKM_1M_2T_2T_1, \dots, \\ T_2T_1M_2M_1KIEA_3A_2A_1\},$$

$|\Omega| = 10!$ , és ha  $A = \{\text{MATEMATIKA szót kapjuk}\}$ ,  $|A| = 3!2!2!$ .

# Újra születésnap

## Példa

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.\end{aligned}$$

Az események halmaza  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ , a hatványhalmaz.

A keresett esemény:

$$\begin{aligned}\{&\text{van kettő azonos születésnap}\} \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}.\end{aligned}$$

# Valószínűségi mérték

## Definíció

Egy  $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  halmazfüggvény *valószínűségi mérték* az  $(\Omega, \mathcal{A})$  mérhetőségi téren, ha

- ▶  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ;
- ▶ ha az  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$

azaz a halmazfüggvény  $\sigma$ -additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

*Legyenek  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ . Ha  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , minden  $i \neq j$  párra, akkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

# A valószínűség tulajdonságai

# A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

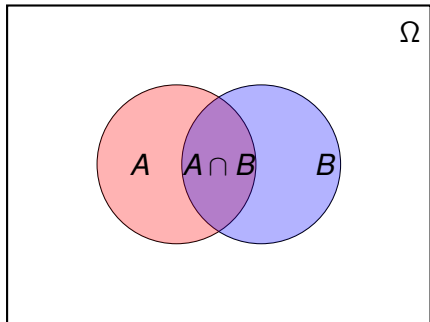
$A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ , és  $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ .



# A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$



# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

*Szitaformula:*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

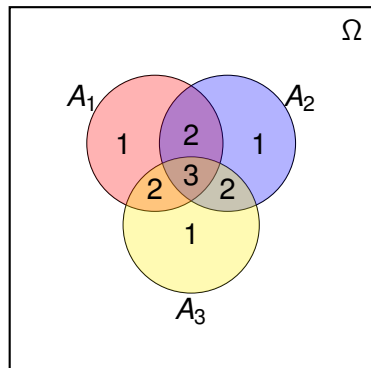
Ez  $n = 2$ -re:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2),$$

# A valószínűség tulajdonságai

és  $n = 3$ -ra:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\ &\quad - (\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_2 \cap A_3)) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$



# A valószínűség tulajdonságai

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

## Állítás

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

Teljes indukcióval.

# Klasszikus valószínűségi mező

## Definíció

Az  $(\Omega, 2^\Omega, \mathbf{P})$  valószínűségi mező **klasszikus**, ha minden kimenetel egyformán valószínű, azaz  $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$  minden  $\omega \in \Omega$  esetén.

Ekkor persze szükségképpen  $c = 1/|\Omega|$ . Tetszőleges  $A$  eseményre  $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ .

# Újra születésnap

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.\end{aligned}$$



Az események halmaza  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ , a hatványhalmaz.

$\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ,  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$