26. Kombinatorikus módszerek az egyszerű szimmetrikus bolyongás vizsgálatában és az arkusz-szinusz törvény

A fejezet témája az egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen. Belátjuk a diszkrét arkusz-szinusz tételt, és explicit formulákat adunk a minimumok és maximumok együttes eloszlására. Az itt kapott eredmények segítségével a későbbiekben a Wiener-folyamat néhány funkcionáljának eloszlását határozzuk meg.

Tekintsünk $n = \ell + m$ darab $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ szimbólumot, melyek mindegyike $+1$ vagy -1. Jelölje $s_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ a k-adik részletösszeget, $k = 1, \dots, n$, és legyen $s_0 = 0$. Ha ℓ darab plusz egy és m darab mínusz egy van, akkor

$$s_k - s_{k-1} = \varepsilon_k = \pm 1\,, \; k = 1, \dots, n\,, \quad s_0 = 0\,, \quad s_n = \ell - m\,. \tag{26.1}$$

Tekintsük a szokásos Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, melyben x a függőleges, t pedig, az időre utalva, a vízszintes tengely. Ebben a koordinátarendszerben az $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ sorozatot egy töröttvonallal ábrázoljuk, melyben a k-adik lépés meredeksége ε_k, és a k-adik csúcspont ordinátája s_k. Az ilyen töröttvonalakat a továbbiakban *utaknak* nevezzük. Legyenek $n > 0$ és $x \in \mathbb{Z}$ egészek. Formálisan az origóból az (n, x) pontba vezető $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ út egy töröttvonal, mely csúcsainak abszcisszái $0, 1, \dots, n$, ordinátái pedig $s_0, s_1, \dots, s_n$, teljesíti (26.1)-et, és $s_n = x$. Egy ilyen útra gyakran a $(0,0) \rightsquigarrow (n, x)$ jelölést használjuk. Az út hossza n.

Világos, hogy 2^n darab különböző n hosszú út van. A (26.1) összefüggések szerint egy út pontosan akkor vezet az origóból az (n, x) pontba, ha

$$n = \ell + m \qquad \text{és} \qquad x = \ell - m\,, \tag{26.2}$$

$\ell = \frac{n+x}{2}$ $\qquad m = \frac{n-x}{2}$

és ebben az esetben az ilyen utak száma

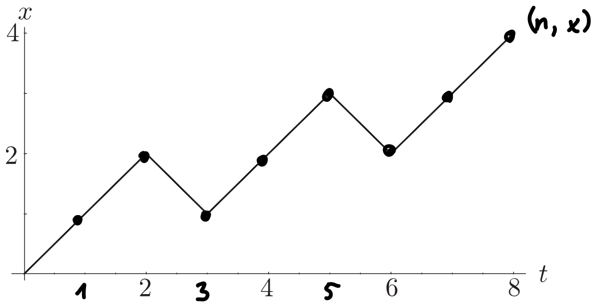
$$N_{n,x} = N_{\ell+m,\,\ell-m} = \binom{n}{\ell} = \binom{n}{m} = \binom{\ell+m}{\ell} = \binom{\ell+m}{m}.$$

$(0,0) \rightsquigarrow (n,x)$ vezető utak száma

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ $\quad \binom{n}{\ell}$

$+1$

$$N_{n,x} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} = \binom{n}{\ell} = \binom{m+\ell}{\ell}$$



n lépésszám
x: hely = l − m
#{+1} #{−1}

n = 8
l = 6
m = 2

1. ábra. Egy 8 hosszú út, ahol $s_8 = 4$.

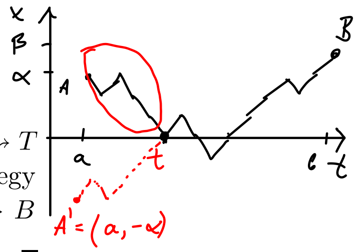
Az egyszerűség kedvéért, ha (26.1) teljesül, de (26.2) nem, akkor legyen $N_{n,x} = 0$.

Analóg módon, tetszőleges $a, b \geq 0$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ egészek esetén használjuk az $A = (a, \alpha) \rightsquigarrow B = (b, \beta)$ jelölést.

Legyenek $A = (a, \alpha)$ és $B = (b, \beta)$ rácspontok az első síknegyedben, melyekre $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Az $A = (a, \alpha)$ pont *tükörképe* az $A' = (a, -\alpha)$ pont.

Tükrözési elv. *Az A-ból B-be vezető, t-tengelyt érintő vagy metsző utak száma megegyezik az A'-ből B-be vezető utak számával.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $(s_a = \alpha, s_{a+1}, \ldots, s_{b-1}, s_b = \beta)$ $A \rightsquigarrow B$ utat melynek egy, vagy több pontja van a t-tengelyen. Legyen az első ilyen pont abszcisszája t, azaz $\alpha = s_a > 0, \ldots, s_{t-1} > 0, s_t = 0$. Ekkor

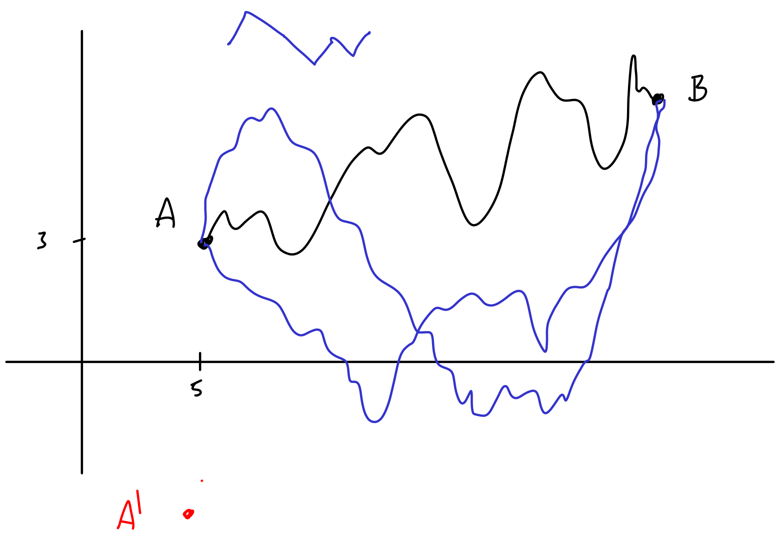


$$(-s_a = -\alpha, -s_{a+1}, \ldots, -s_{t-1}, s_t = 0, s_{t+1}, s_{t+2}, \ldots, s_b = \beta)$$

egy $A' \rightsquigarrow B$ út, melynek $T = (t, 0)$ az első pontja a t-tengelyen. Az új út $A' \rightsquigarrow T$ szakasza az eredeti út $A \rightsquigarrow T$ szakaszának t-tengelyre való tükörképe. Ezzel egy egy-egyértelmű megfeleltetést adtunk meg a tengelyt metsző vagy érintő $A \rightsquigarrow B$ utak és az $A' \rightsquigarrow B$ utak között. ∎

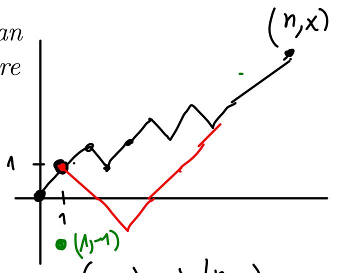
A valószínűségszámítási irodalom a tükrözési elvet D. Andrénak tulajdonítja, aki 1887-ben bolyongásokkal kapcsolatos összeszámlálási problémák megoldására használta. Ugyanakkor, habár más kontextusban, Lord Kelvin és Maxwell már korábban is használták ezt az igen hasznos segédeszközt.

A következő tétel már W. A. Whitworth 1878-ban megjelent könyvében is szerepel, mégis gyakran J. Bertrand-nak tulajdonítják az eredményt, aki 1888-ban újra igazolta.



Ballot-tétel[1]. *Legyenek n és x pozitív egészek. Pontosan $\frac{x}{n}N_{n,x}$ darab olyan $(s_1,\ldots,s_n = x)$ út van, mely az origóból az (n,x) pontba vezet, és melyre $s_1 > 0,\ldots,s_n > 0$. Ha $n = \ell + m$ és $x = \ell - m > 0$, akkor ez*

$$\frac{\ell - m}{\ell + m}\binom{\ell + m}{m}.$$



Bizonyítás. Világos, hogy a megfelelő utak száma pontosan annyi, mint az olyan $(1,1) \rightsquigarrow (n,x)$ utak száma, melyek nem érintik és nem is metszik a t-tengelyt. Összesen $N_{n-1,x-1}$ darab $(1,1) \rightsquigarrow (n,x)$ út van. Azon utak száma, melyek érintik vagy metszik a t-tengelyt a tükrözési elv szerint pontosan annyi, mint az $(1,-1) \rightsquigarrow (n,x)$ utak száma: $N_{n-1,x+1}$. Ezek szerint a keresett érték $N_{n-1,\,x-1} - N_{n-1,\,x+1}$. A bizonyítás további része már mechanikus számolás. Valóban, ha $n = \ell + m$ és $x = \ell - m > 0$ valamely $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ értékekre úgy, hogy (26.2) teljesül, akkor

$(1,1) \rightsquigarrow (n,x)$ utak száma $= (0,0) \rightarrow (n-1,x-1)$ utak száma $= N_{n-1,x-1}$

$n = \ell + m$
$x = \ell - m$

$$\begin{aligned}
N_{n-1,\,x-1} - N_{n-1,\,x+1} &= \binom{\ell+m-1}{\ell-1} - \binom{\ell+m-1}{\ell} \\
&= \frac{(\ell+m-1)!}{(\ell-1)!\,m!} - \frac{(\ell+m-1)!}{\ell!\,(m-1)!} \\
&= \frac{(\ell+m)!}{\ell!\,m!}\left\{\frac{\ell}{\ell+m} - \frac{m}{\ell+m}\right\} \\
&= \frac{\ell-m}{\ell+m}\binom{\ell+m}{m} = \frac{x}{n}N_{n,\,x}\,,
\end{aligned}$$

tükrözési elv

$(1,1) \rightsquigarrow (n,x)$ érinti vagy metszi a t tengelyt $= (1,-1) \rightsquigarrow (n,x)$ utak száma

$N_{n-1,x+1}$

ami mindkét állításunkat igazolja. ∎

Whitworth és Bertrand is a következő alkalmazását adták a fenti tételnek, mely a tétel elnevezését is megmagyarázza. Tegyük fel, hogy egy választás során L jelölt ℓ, M jelölt pedig m szavazatot kap, és $\ell > m$, azaz L nyer. Amikor a szavazatokat összeszámolják minden egyes kimenetel leírható egy $(0,0) \rightsquigarrow (\ell+m, \ell-m)$ úttal, melyben $\varepsilon_k = 1$, ha a k-adik szavazatot L kapta. Ekkor s_k a k-adik szavazat után L előnye vagy hátránya. Tegyük fel, hogy mind az

$$N_{n,x} = \binom{\ell+m}{m}$$

lehetséges kimenetel egyformán valószínű. Ezzel a terminológiával a ballot-tétel egyszerűen azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy L a szavazatszámlálás alatt végig vezet $(\ell - m)/(\ell + m)$.

[1] Az angol ballot szó jelentése szavazatszámlálás, de ettől a szakirodalomban már meghonosodott szóhasználattól nem térünk el.

Bolyongás. Tekintsük a 14. fejezetben definiált egyszerű szimmetrikus

$$\{S_0 = 0, S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, S_3 = X_1 + X_2 + X_3, \ldots\}$$

bolyongást, ahol $X_1, X_2, \ldots$ valamely $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett független véletlen változók, melyek $1/2 - 1/2$ valószínűséggel veszik fel a ± 1 értékeket. A determinisztikus ε_k értéket X_k-val, s_k-t pedig S_k-val helyettesítve egy véletlen utat kapunk, mely megfeleltethető a bolyongásnak. Így minden $n = 1, 2, \ldots$ értékre az $(S_0 = 0, S_1, \ldots, S_n)$ út – ami nem más, mint a teljes $(S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots)$ bolyongás első n lépése – 2^n lehetséges kimenetel egyike, mindegyik $1/2^n$ valószínűséggel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a n-edik időpillanatban éppen a k pontba érünk

annak a valsége, hogy n lépés után k-ba jutunk.

(n, x)

$$p_{n,k} := p_n(k) = \mathbf{P}\{S_n = k\} = \frac{N_{n,k}}{2^n} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \frac{1}{2^n}\,. \tag{26.3}$$

$$\begin{cases} n = l + m \\ k = l - m \end{cases}$$

[A fenti binomiális együttható értéke akkor nem 0, ha $(n+k)/2$ egész és $0 \le (n+k)/2 \le n$.] Speciálisan, annak a valószínűsége, hogy a $2n$ lépés után éppen a 0-ba érünk

$$u_{2n} := \underbrace{p_{2n,0}} = \mathbf{P}\{S_{2n} = 0\} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}\,. \tag{26.4}$$

$p_{1,0} = 0$
$p_{3,0} = 0$
$\vdots$
$p_{2n+1,0} = 0.$

Legyen továbbá

$$f_0 = 0\,, \quad f_{2k} = \mathbf{P}\{S_1 \ne 0, \ldots, S_{2k-1} \ne 0, S_{2k} = 0\} \tag{26.5}$$

annak a valószínűsége, hogy a $2k$-adik lépésben térünk vissza először a 0-ba, és $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$\alpha_{2k,2n} = \mathbf{P}\{S_{2k} = 0, S_{2k+1} \ne 0, S_{2k+2} \ne 0, \ldots, S_{2n} \ne 0\}$$

annak a valószínűség, hogy a $2n$-edik időponttal bezárólag a $2k$-adik pillanatban voltunk utoljára a 0-ban.

A 14. fejezteben láttuk, hogy az egyszerű szimmetrikus bolyongás természetes módon megfeleltethető mind végtelen érmedobás sorozatnak, mind pedig egy szerencsejáték-sorozatnak [l. Játékos csődje]. Mindkét interpretációt további említés nélkül használjuk.

A következő állításban a most definiált mennyiségek alapvető tulajdonságait foglaljuk össze.

26.1. Állítás. *Tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén*

$u_{2n} = P(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$

$f_{2n} = P(S_{2n}=0$ és ez az első ilyen$)$

(i) $u_{2n} = f_2\, u_{2n-2} + f_4\, u_{2n-4} + \cdots + f_{2n}\, u_0\,;$

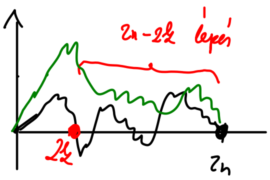
(ii) $\mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0\} = \frac{1}{2}\, u_{2n} = \mathbf{P}\{S_1 < 0, \ldots, S_{2n} < 0\}\,;$

(iii) $\mathbf{P}\{S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0\} = u_{2n}\,;$

(iv) $\mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0\} = u_{2n}\,;$

(v) $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1}\, u_{2n}\,;$

(vi) $\alpha_{2k,2n} = u_{2k}\, u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n}}\,,\ k = 0, 1, \ldots, n.$



$f_{2k}\cdot u_{2n-2k}$

$u_0 = 1$

Bizonyítás. (i) A kérdéses eseményt a 0-ba való első visszatérés időpontja szerint egymást kizáró eseményekre bontjuk fel. Ha a $2n$-edik lépésben térünk vissza először a 0-ba, akkor ennek a valószínűsége $f_{2n} = f_{2n}u_0$. Különben az első visszatérés $2k$-adik pillanatban történt, majd ezt követte $2n-2k$ lépés, és ismét a 0-ba jutottunk, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ennek a valószínűsége $f_{2k}u_{2n-2k}$. Összegzés után kapjuk az állítást.

(ii) Az S_{2n} véletlen változó csak páros értékeket vehet fel, így

$$\mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0\} = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r\}\,.$$

A ballot-tétel bizonyításánál láttuk, hogy azon $(0,0) \rightsquigarrow (2n, 2r)$ utak száma, melyekre $(s_1 > 0, \ldots, s_{2n-1} > 0, s_{2n} = 2r)$, (26.3)-at is figyelembe véve

$$N_{2n-1,\,2r-1} - N_{2n-1,\,2r+1} = 2^{2n-1}(p_{2n-1,\,2r-1} - p_{2n-1,\,2r+1})\,,$$

és ezért

$$\mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r\} = \frac{1}{2}(p_{2n-1,\,2r-1} - p_{2n-1,\,2r+1})\,.$$

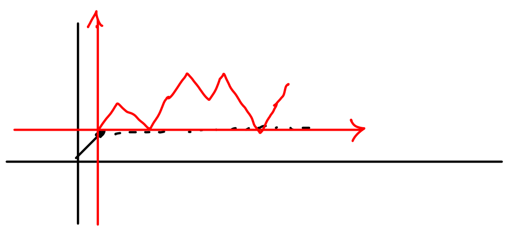
Így egy teleszkopikus összeget kapunk, és mivel $p_{2n-1,2n+1} = 0$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0\} &= \frac{1}{2}\, p_{2n-1,\,1} = \frac{1}{2}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(2n-1)!\,2\,n}{n!\,(n-1)!\,n}\,\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2}\,u_{2n}\,.\end{aligned}$$

A második állítás szimmetria okok miatt következik az előzőből.

(iii) Az $\{S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0\} = \{S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0\} \cup \{S_1 < 0, \ldots, S_{2n} < 0\}$ felbontás alapján következik (ii)-ből.

(iv) Egy $2n$ hosszú út, mely szigorúan a t-tengely fölött halad szükségképpen áthalad az $(1, 1)$ ponton. Ezt tekintve új origónak, egy olyan $2n-1$ hosszú utat



kapunk, melynek csúcsai az *új* vízszintes tengelyen vagy afölött vannak. Ezek szerint

Piros

$$\mathbf{P}\{S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0\} = \mathbf{P}\{S_1 = 1\}\mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0\}$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0\}.$$

Vegyük észre, hogy S_{2n-1} páratlan szám, ezért ha $S_{2n-1} \geq 0$, akkor $S_{2n} \geq 0$ is teljesül, vagyis $\mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0\} = \mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0\}$. Az állítás most már következik (ii)-ből.

(v) Figyelembe véve, hogy S_{2n-1} nem lehet 0, (iii) és (26.4) alapján

$$\begin{aligned} f_{2n} &= \mathbf{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\} \quad = P(\text{2n-ben ért vissza } \underline{\text{először}} \text{ a 0-ba}) \\ &= \mathbf{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n\cancel{-1}} \neq 0\} - \mathbf{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} \\ &= \mathbf{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0\} - \mathbf{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} \\ &= u_{2n-2} - u_{2n} = \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{2^{2n-2}} - u_{2n} \\ &= \frac{(2n-2)!\,2^2\,n^2}{(n-1)!\,(n-1)!\,n^2}\,\frac{1}{2^{2n}} - u_{2n} \\ &= \frac{2n}{2n-1}\,\frac{(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{1}{2^{2n}} - u_{2n} = \frac{2n}{2n-1}u_{2n} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1}u_{2n}\,. \end{aligned}$$

$u_{2n} = P(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$

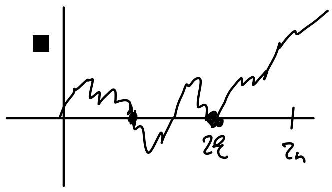
(vi) Minden rögzített $k = 0, 1, \dots, n$ esetén olyan utakat keresünk, melyekre $s_{2k} = 0, s_{2k+1} \neq 0, \dots, s_{2n} \neq 0$. Az első $2k$ csúcsot $2^{2k}u_{2k}$ féleképpen választhatjuk. A $(2k, 0)$ pontot véve új origónak a (iii) pont szerint a többi $2n - 2k$ csúcsot $2^{2n-2k}u_{2n-2k}$ módon választhatjuk. Összesen tehát $2^{2n}u_{2k}u_{2n-2k}$ lehetőségünk van, vagyis a keresett valószínűség valóban $u_{2k}u_{2n-2k}$. Végül (26.4) szerint

$\underline{\text{Áll.}}$:
$\alpha_{2k,2n} = u_{2k}\, u_{2n-2k}$

$\alpha_{2k,2n} = P(S_{2k}=0, \text{ és utána 2n-ig nem } 0)$

$$u_{2k}u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n-2k}} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n}}\,.$$

■



Jelölje az első n lépés során a pozitív oldalon megtett lépések számát

$$\begin{aligned} N_n &= \#\{1 \leq k \leq n : S_k > 0\} + \#\{1 \leq k \leq n : S_{k-1} > 0\,,\ S_k = 0\} \\ &= \#\{1 \leq k \leq n : S_{k-1} \geq 0\,,\ S_k \geq 0\}\,, \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$, és legyen

$$\beta_{2k,2n} = \mathbf{P}\{N_{2n} = 2k\}\,, \quad k = 0, 1, \dots, n\,.$$

első visszatérés $\qquad$ visszatérés

$$\underset{\downarrow}{f_{2n}} = \underset{\downarrow}{u_{2n-2}} - u_{2n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$f_2 = u_0 - u_2 = 1 - \cancel{u_2}$$
$$f_4 = \cancel{u_2} - \cancel{u_4}$$
$$f_6 = \cancel{u_4} - \cancel{u_6}$$
$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{2k} = f_2 + \ldots + f_{2n} = 1 - u_{2n}$$

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \frac{1}{2^{2n}} \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2\pi 2n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \overset{(*)}{\sim}$$

Stirling-formula: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \to \infty) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$

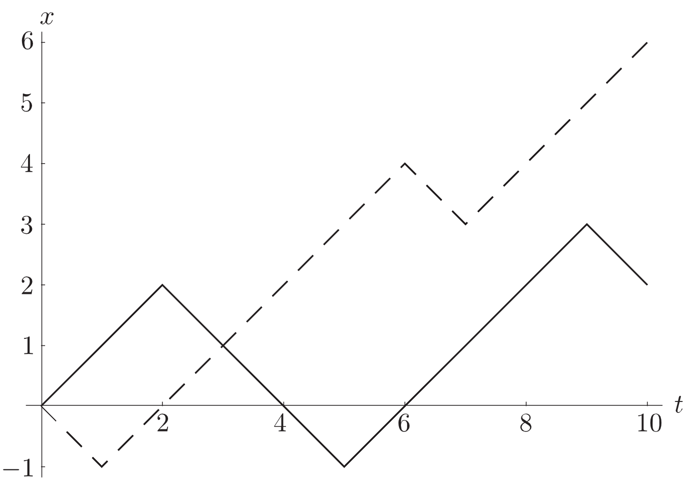
$$\overset{(*)}{\sim} \frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{2^{2n}}} \cdot \frac{\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}} \frac{\sqrt{2\pi n}\,\sqrt{2}}{2\pi n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Tehát $\qquad u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{2k} = \lim_{n\to\infty} (1 - u_{2n}) = 1.$$

Következmény: az egyszerű szimm. bolyongás visszatérő! rekurrens egy dimenzióban.

visszatérési idő várható értéke $= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot \underbrace{f_{2n}}_{\frac{1}{2n-1} \cdot u_{2n}} \sim \sum \underbrace{u_{2n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}} = \infty$



2. ábra. Két példa, melyre $N_{10} = 8$.

Másképpen, azon $2n$ hosszú töröttvonalak száma, melyeknek $2k$ oldala van a tengely fölött $2^{2n}\beta_{2k,2n}$. Az $n = 5$, $k = 4$ esetben ilyen töröttvonalakat láthatunk a 2. ábrán.

Az alábbi tétel az egyszerű szimmetrikus bolyongásra vonatkozó egyik legfontosabb eredmény. A eredeti bizonyítás analitikus, a generátorfüggvények módszerét használja. Jelen kombinatorikus bizonyítás Fellertől származik.

Diszkrét arkusz-szinusz törvény (K. L. Chung, W. Feller, 1949)**.** *Annak a valószínűsége, hogy egy egyszerű szimmetrikus bolyongás $2n$ lépés során $2k$ lépést tesz a pozitív oldalon*

$$\beta_{2k,2n} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Továbbá ez valószínűségeloszlás, azaz $\sum_{k=0}^{n} \beta_{2k,2n} = 1$

Bizonyítás. Ha $k = n$, akkor $\beta_{2n,2n} = \mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0\}$, és így a 26.1. Állítás (iv) pontja szerint

$$\beta_{2n,2n} = u_{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = u_{2n}\, u_0 = u_{2n}\, u_{2n-2n} = \alpha_{2n,2n}\,.$$

$\alpha_{2n,2k} = P(S_{2k}=0$, utána $2n$-ig nem $0)$.

A $k = 0$ esetben a szimmetria miatt $\beta_{0,2n} = \mathbf{P}\{S_1 \leq 0, \ldots, S_{2n} \leq 0\} = \alpha_{0,2n} = \alpha_{2n,2n}$. Ezzel az állítást a $k = 0$ és $k = n$ esetben beláttuk.

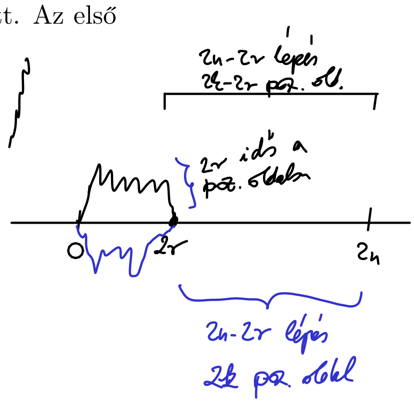
$\alpha_{2n,2k} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$

Legyen most $1 \le k \le n-1$. Ebben az esetben csak $2k$ lépés történik a t-tengely felett, ezért az út valamikor visszatér a 0-ba. Legyen $2r$ az első ilyen időpont, $r < n$. Ekkor $2r$-ig vagy minden oldal a pozitív oldalon van, amikor is a $(2r, 0)$ csúcs után pontosan $2k - 2r$ oldal van a tengely fölött, vagy minden oldal a negatív oldalon van, amikor is a $(2r, 0)$ csúcs után pontosan $2k$ oldal van a tengely fölött. Az első esetben az utak száma

$$2^{2r}\,\mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0\}\, 2^{2n-2r} \underbrace{\beta_{2k-2r,2n-2r}}\,,$$

míg a második esetben [ekkor szükségképpen $n - r \ge k$]

$$2^{2r}\,\mathbf{P}\{S_1 < 0, \ldots, S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0\}\, 2^{2n-2r} \beta_{2k,2n-2r}\,.$$



Világos, hogy

$$\begin{aligned} q_{r1} &:= \mathbf{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0\} \\ &= \mathbf{P}\{S_1 < 0, \ldots, S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0\} =: q_{r2}, \text{ és} \\ q_{r1} + q_{r2} &= \mathbf{P}\{S_1 \ne 0, \ldots, S_{2r-1} \ne 0, S_{2r} = 0\} = f_{2r}, \end{aligned}$$

ahol f_{2r} (26.5)-ben definiált. Ezért $q_{r1} = q_{r2} = f_{2r}/2$, és az utak száma az első, ill. a második esetben

$$2^{2n} \frac{f_{2r}}{2} \beta_{2k-2r,2n-2r}\,, \quad \text{ill.} \quad 2^{2n} \frac{f_{2r}}{2} \beta_{2k,2n-2r}\,.$$

Mivel r az első esetben olyan, hogy $1 \le r \le k$, míg a másodikban $1 \le r \le n-k$, ezért összegezve a

$$\beta_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2r}\, \beta_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}\, \beta_{2k,2n-2r} \tag{26.6}$$

$\beta_{2k,2n} = P($2n lépés során 2k volt poz$)$

formulát kapjuk, $1 \le k \le n-1$.

Megmutatjuk, hogy

$$\boxed{\beta_{2k,2m} = \alpha_{2k,2m}\,,} \quad 0 \le k \le m-1\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,, \tag{26.7}$$

$\alpha_{2k,2n} = P(S_{2k} = 0$ és utána 2n-ig nem $0)$

hiszen $\alpha_{2k,2m}$-re már a 26.1. Állítás (vi) pontjában igazoltuk a kérdéses egyenlőséget. Teljes indukcióval bizonyítunk m szerint. Ha $m = 1$, akkor ez $\beta_{0,2} = \alpha_{0,2}$, amit már [általánosan] igazoltunk a bizonyítás elején. Tegyük fel, hogy (26.7) teljesül minden $1 \le m \le n-1$ esetén. Ekkor (26.6) szerint

$$\beta_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2r}\, \overset{\beta}{\overset{\downarrow}{\alpha}}_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}\, \overset{\beta}{\overset{\downarrow}{\alpha}}_{2k,2n-2r}\,,$$

$\alpha_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$

és így a 26.1. Állítás (vi), majd (i) pontja alapján

$$\begin{aligned}
\beta_{2k,2n} &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}\, u_{2k-2r}\, u_{(2n-2r)-(2k-2r)} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}\, u_{2k}\, u_{(2n-2r)-2k} \\
&= \frac{1}{2}\, u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}\, u_{2k-2r} + \frac{1}{2}\, u_{2k}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}\, u_{2(n-k)-2r} \\
&= \frac{1}{2}\, u_{2n-2k}\, u_{2k} + \frac{1}{2}\, u_{2k}\, u_{2(n-k)} = u_{2k}\, u_{2n-2k} \\
&= \alpha_{2k,2n}\,.
\end{aligned}$$

$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \dots + f_{2n} \cdot 1$

A bizonyítás első részét is figyelembe véve, indukcióval kaptuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $k = 0, 1, \dots, n$ esetén $\beta_{2k,2n} = \alpha_{2k,2n}$.

Az, hogy minden n-re $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k,2n} = 1$ következik a definícióból, hiszen $\alpha_{0,2n}, \alpha_{2,2n}, \dots, \alpha_{2n,2n}$ annak az eloszlása, hogy a $2n$-edik lépésig mikor jártunk utoljára a 0-ban, a 0. lépést is beleértve. ∎

A $\mathbf{P}\{N_{2n} = 2k\} = \alpha_{2k,\,2n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, eloszlást *diszkrét n-edrendű arkusz-szinusz eloszlásnak* nevezik. Az elnevezést az indokolja, hogy az $n+1$ pontot jól közelíti az $f(\cdot)/n$ függvény, ahol

$$f(u) = \frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}\,, \quad 0 < u < 1\,,$$

ami az

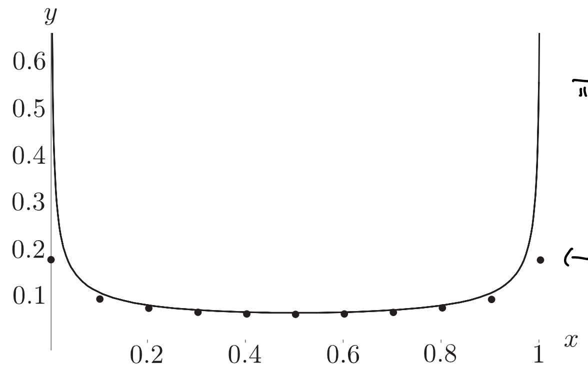
$$F(u) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u}\,, \quad 0 < u < 1\,, \tag{26.8}$$

arkusz-szinusz eloszlásfüggvény sűrűsége. Az

$$\alpha_{2k,\,2n} \approx \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{26.9}$$

közelítés hibája elhanyagolható, kivéve ha k közel van 0-hoz, vagy n-hez.

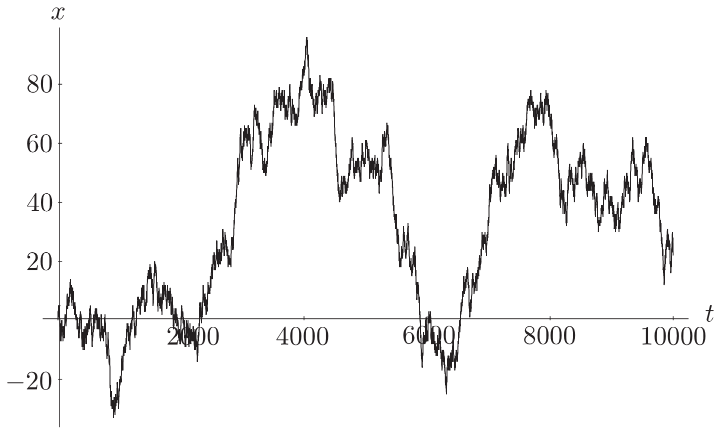
Vegyük észre, hogy a kapott eloszlás szimmetrikus, azaz $\alpha_{2k,\,2n} = \alpha_{2n-2k,\,2n}$, és $\alpha_{n,\,2n}$ a legkisebb érték, $\alpha_{0,\,2n} = \alpha_{2n,\,2n}$ a legnagyobbak. A diszkrét arkusz-szinusz törvény ellentmond a természetes intuíciónak. Az érmedobás terminológiáját használva az első játékos az idő $N_{2n}/(2n)$ részében vezet, és ez az érték nagy valószínűséggel közelebb van 0-hoz vagy 1-hez, mint 1/2-hez. A 4. ábrán pl. egy olyan véletlen kimenetelt láthatunk, ahol az idő nagy részében az első játékos vezet. Vagyis nagyon sokáig kell az érmét dobálni ahhoz, hogy a kiegyenlítődés bekövetkezzen. Bizonyos értelemben ez sosem következik be igazán.



$\frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}$

$\leftarrow \alpha_{2j,10} \cdot 2$

3. ábra. A (26.9) közelítés $n = 10$ esetén.



4. ábra. A bolyongás egy kimenetele; $n = 10000$.

A következő tétel a (26.9) approximációt teszi egzakttá.

$\frac{N_{2n}}{2n}$ ← összes idő a poz. oldalon 2n-ig

poz. oldalon eltöltött idő aránya

26.1. Tétel. *Tetszőleges* $0 \le u \le 1$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{N_{2n}}{2n} \le u\right\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u}\,.$$

Bizonyítás. Legyen $0 < a < u < 1$. Chung és Feller tétele szerint

$$\mathbf{P}\left\{a \le \frac{N_{2n}}{2n} \le u\right\} = \sum_{j\in H} \alpha_{2j,\,2n} = \sum_{j\in H} \binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}\frac{1}{2^{2n}}\,,$$

a>0 szigorú

$2an \le j \le 2un$

$j \to \infty$

$n-j \to \infty$

$n \to \infty$

ahol $H = \{j : 2an \le 2j \le 2un\}$. Fontos, hogy $n \to \infty$ esetén $j \to \infty$, és $n - j \ge n(1-u)$ miatt $n - j \to \infty$. Ezért a Stirling-formula szerint

$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\begin{aligned}
\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}\frac{1}{2^{2n}} &= \frac{(2j)!}{(j!)^2}\frac{(2n-2j)!}{((n-j)!)^2}\frac{1}{2^{2n}} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi 2j}\,\left(\frac{2j}{\cancel{e}}\right)^{2j}}{2\pi j\,\left(\frac{j}{\cancel{e}}\right)^{2j}}\,\frac{\sqrt{2\pi 2(n-j)}\,\left(\frac{2\cancel{(n-j)}}{\cancel{e}}\right)^{2(n-j)}}{2\pi(n-j)\,\left(\frac{\cancel{n-j}}{\cancel{e}}\right)^{2n-2j}}\,\cancel{\frac{1}{2^{2n}}} \\
&= \frac{\cancel{4\pi}\sqrt{j(n-j)}}{\cancel{4\pi^2}j(n-j)}\cancel{2^{2j}2^{2n-2j}}\cancel{\frac{1}{2^{2n}}} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{j(n-j)}}.
\end{aligned}$$

Jelölje $j = j_n$ azt az értéket, melyre a

$$\max_{an \le j \le un}\left|\frac{\alpha_{2j,\,2n}}{\left(\pi\sqrt{j(n-j)}\right)^{-1}} - 1\right|$$

maximum felvétetik. Világos, hogy ez a maximum 0-hoz tart. Ez pedig azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $n \ge n_0$ esetén

$$(1-\varepsilon)\sum_{j\in H}\frac{1}{\pi\sqrt{j(n-j)}} \le \mathbf{P}\Big\{a \le \frac{N_{2n}}{2n} \le u\Big\} \le (1+\varepsilon)\sum_{j\in H}\frac{1}{\pi\sqrt{j(n-j)}}\,.$$

Vegyük észre, hogy az

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\{j:\,a\le\frac{j}{n}\le u\}}\frac{1}{\sqrt{j(n-j)}} = \frac{1}{\pi}\sum_{\{j:\,a\le\frac{j}{n}\le u\}}\frac{1}{\sqrt{\frac{j}{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)}}\left(\frac{j}{n}-\frac{j-1}{n}\right)$$

összeg egy Riemann-féle közelítő összeg, ami az alábbi integrálhoz konvergál. Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet,

$0 < a < u < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\cancel{a} \le \frac{N_{2n}}{2n} \le u\right\} = \frac{1}{\pi}\int_a^u \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = F(u) - \cancel{F(a)}$$

$\lim_{a\to 0}$

minden $0 < a < u < 1$ esetén, ahol $F(\cdot)$ (26.8)-ban definiált. Mivel $F(0) = 0$ és $F(1) = 1$ az $a \to 0$ határátmenet [a 2.4. Feladathoz hasonlóan] igazolja a tételt. ■

Végül az egyszerű szimmetrikus bolyongás maximumának, minimumának és az utolsó pozíciójának együttes eloszlására igazolunk egy formulát. Jelölje tehát

$$m_n = \min_{0\le k\le n} S_k \quad \text{és} \quad M_n = \max_{0\le k\le n} S_k$$

n játék során [szabályos érmét dobálunk] az első játékos legkisebb és legnagyobb nyereményét, és legyen

$$q_n(a,b,v) = \mathbf{P}\{a < m_n \le M_n < b\,,\, S_n = v\}\,.$$

26.2. Tétel. *Olyan a, b és v egészek esetén, melyek teljesítik az*

$$a \le 0 \le b\,,\ a < b\,,\ a \le v \le b\,, \tag{26.10}$$

egyenlőtlenségeket

$$q_n(a,b,v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n\Big(2k(b-a)+v\Big) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n\Big(2k(b-a)+2b-v\Big)\,, \tag{26.11}$$

ahol

$$p_n(j) = \mathbf{P}\{S_n = j\} = \binom{n}{\frac{n+j}{2}}\frac{1}{2^n}\,, \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n\,.$$

Megjegyezzük, hogy a (26.11) formulában szereplő végtelen sor csak formálisan végtelen, hiszen a fenti binomiális együttható értéke 0, ha $(n+j)/2$ értéke nem egész, vagy abszolútértéke nagyobb, mint n. Ha n és v paritása eltérő, akkor (26.11) mindkét oldala eltűnik.

Bizonyítás. A rövidség kedvéért jelölje a (26.11) egyenletet $[n,a,b,v]$. Teljes indukcióval bizonyítunk n szerint. Könnyen ellenőrizhető, hogy $[0,a,b,v]$ igaz.

Tegyük fel, hogy $[n-1,a,b,v]$ fennáll valamely $n \ge 1$ esetén minden (26.10)-et kielégítő a, b, v hármasra. Definíció alapján $m_n \le 0$ és $M_n \ge 0$, ezért $q_n(0,b,v) = 0$ és $q_n(a,0,v) = 0$. Ha a vagy b nulla, akkor (26.11) jobb oldala is 0, hiszen $p_n(j) = p_n(-j)$, így a két szumma kiejti egymást. Tehát $[n,a,b,v]$ igaz, ha $a = 0$ vagy $b = 0$.

Legyen most $a < 0 < b$, $a \le v \le b$. Ekkor $a+1 \le 0$ és $b-1 \ge 0$, így az indukciós feltevés szerint $[n-1,a-1,b-1,v-1]$ és $[n-1,a+1,b+1,v+1]$ fennáll. Ekkor az első lépés szerint szétbontva az eseteket, a

$$q_n(a,b,v) = \frac{1}{2}\,q_{n-1}(a-1,b-1,v-1) + \frac{1}{2}\,q_{n-1}(a+1,b+1,v+1)$$

rekurziót kapjuk, és így az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned} q_n(a,b,v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-1}\Big(2k(b-a)+v-1\Big) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-1}\Big(2k(b-a)+2b-v-1\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-1}\Big(2k(b-a)+v+1\Big) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-1}\Big(2k(b-a)+2b-v+1\Big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n\Big(2k(b-a)+v\Big) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n\Big(2k(b-a)+2b-v\Big)\,, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az egyszerű

$$p_n(j) = \frac{1}{2}\,p_{n-1}(j-1) + \frac{1}{2}\,p_{n-1}(j+1)\,,$$

rekurziót. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Feladatok

1. Egy szerencsejátékos a kaszinóban elveszíti minden pénzét, de a forintra lenne szüksége buszjegyre. Mivel törzsvendég, a kaszinó felajánl $b-1$ forint hitelt ha n-szer feldob egy szabályos érmét, és minden dobásnál 1 forintot nyer vagy veszít. Ha adóssága valamikor eléri a b forintot, akkor gyalogolhat hazáig, és legközelebb vissza kell fizetnie a kölcsönt. Különben végigjátssza az n játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy notórius szerencsejátékos barátunknak nem kell hazagyalogolnia? Mekkora ez az érték, ha $a=5$, $b=2$ és $n=10$?

2. Egy mozi előtt $n+m$ ember áll sorba véletlen sorrendben. Mindegyükük pontosan egy jegyet akar venni a következő előadásra. Minden jegy 1000 Ft-ba kerül. Tegyük fel, hogy m embernél csak 2000 Ft-os, n-nél pedig csak 1000 Ft-os bankjegy van, és $m \leq n$. Mennyi a valószínűsége, hogy nem akad meg a sor pénzváltás miatt, ha kezdetben

(a) a kassza üres?

(b) pontosan k darab 1000 Ft-os van a kasszában?