Valószínűségszámítás

4. feladatsor: függetlenség, véletlen változók

1. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

2. Válasszunk találomra az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.

(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1 p_2 | n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.

(b) Igazoljuk, hogy

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

3. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

4. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

5. Egy dobókockával n-szer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első m dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy az n dobás közt nincs egyes, $m < n$. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

6. Legyenek $x \in [0, 1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be (lehetőleg valószínűségi gondolatmenettel), hogy

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

7. A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással. A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket. (A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.) Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?

8. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

(b) $F(x) = e^{-e^{-x}}$.

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$

9. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

(a) $p^k q^2$, ahol $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$;

(c) $3^k/k!e^{-3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

10. Sűrűségfüggvény-e?

(a) $f(x) = (I_{(0,1)}(x) \sin x)/2$;

(b) $f(x) = I_{(1,\infty)}(x)x^{-2}$;

(c) $f(x) = I_{(0,\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$.

(d) $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$.

11. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Jelölje X a szükséges próbálkozások számát. Adjuk meg X eloszlását, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi;

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre.

12. Adjunk példát olyan F eloszlásfüggvényre, mely tiszta ugrófüggvény, és bármely $a < b$ esetén $F(b) - F(a) > 0$!

13. Ötöslottón egy szelvénnyel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!

14. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

15. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legkisebb szám eloszlását!

16. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását?

17. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje X a második piros sorszámát. Adjuk meg X eloszlását!

18. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson–eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i-edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását! (X Poisson-eloszlású λ paraméterrel, ha $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.)

19. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

20. Mutassuk meg, hogy két független Poisson–eloszlású véletlen változó összege is Poisson–eloszlású!