Valószínűségszámítás

2. feladatsor: Szita formula, kombinatorikus és geometriai valószínűség, vegyes

1. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

2. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik próbálkozása sikeres, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

3. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

4. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre $0,19$, $0,25$, illetve $0,28$ valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy $0,05$, hogy az első és a harmadik is csődbe megy $0,1$, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is $0,1$. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

5. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegeik kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 kólát vásárolva sikerül kigyűjtenünk a három testvért? (Segítség: a kupakokra gondoljunk úgy mintha egy zsákból húznánk egy nevet, melyben Kevin háromszor, Joe kétszer, Nick pedig egyszer szerepel.)

6. Sorban elhelyezett n dobozba találomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

7. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

8. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n-edik dobásra következik be. Határozzuk meg p_n-et!

9. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

10. A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

11. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

12. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 + Xx + Y = 0$ egyenletnek valós gyökei lesznek?

13. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

14. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?

15. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

16. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint $3/2$?

17. Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D. Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást?

18. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint $1/4$?

19. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?