A sztochasztika alapjai

8. feladatsor: véletlen változók, várható érték, szórás

1. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kiveszek 4 cipőt. Jelölje X a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

4 pár cipő . Kiveszünk 4 db cipőt
(8 cipő)

Összeillő párok: X

klasszikus vsz. mező: $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$

lehetséges értékek: 0, 1, 2 .

$$P(X=0) = \frac{2^4}{\binom{8}{4}} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

összes: $\binom{8}{4}$

2	B_1 J_1	← innen 1
2	B_2 J_2	← innen 1
2	B_3 J_3	← innen 1
2	B_4 J_4	← innen 1

$$P(X=1) = \frac{48}{\binom{8}{4}} = \frac{48}{70} = \frac{24}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

$$\binom{8}{4} = \frac{\cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 70$$

pontosan 1 pár:

kedvező: $\underset{\text{melyik pár}}{4} \cdot \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{maradék 6 cipőből 2 választok úgy, hogy nincs pár}} \cdot 2^2 = 48$

melyik 2 párból; ← melyiket

összes, rossz

$$\binom{6}{2} - 3 = 12$$

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

pontosan 2 pár: $\binom{4}{2} = 6$

4 különböző párból 2 pár

$\Rightarrow$

$P(X=0) = \frac{8}{35} \quad P(X=1) = \frac{24}{35} \quad P(X=2) = \frac{3}{35}$

$$E(X) = \sum_i P(X=x_i) \cdot x_i = \frac{8}{35} \cdot 0 + \frac{24}{35} \cdot 1 + \frac{3}{35} \cdot 2$$

$$= \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{36}{35} - \frac{36}{49} = \frac{7 \cdot 36 - 5 \cdot 36}{145} = \frac{72}{145}$$

$$E(X^2) = \sum_i P(X=x_i) \cdot x_i^2 = \frac{8}{35} \cdot 0^2 + \frac{24}{35} \cdot 1^2 + \frac{3}{35} \cdot 2^2$$

$$= \frac{24+12}{35} = \frac{36}{35}$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{72}{145}}.$$

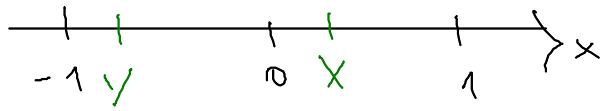
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

eloszlásfggv. $\qquad$ sűrűségfggv.

2. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!

M : maximum

X, Y a két választott szám



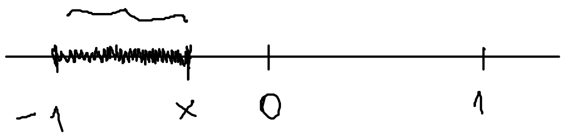
$M = \max(X, Y)$, X, Y függetlenek!

$$F(x) = P(M \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq x) \overset{(*)}{=}$$

$$\{M \leq x\} = \{X \leq x, Y \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq x\}$$

$$\{\omega : M(\omega) \leq x\}$$

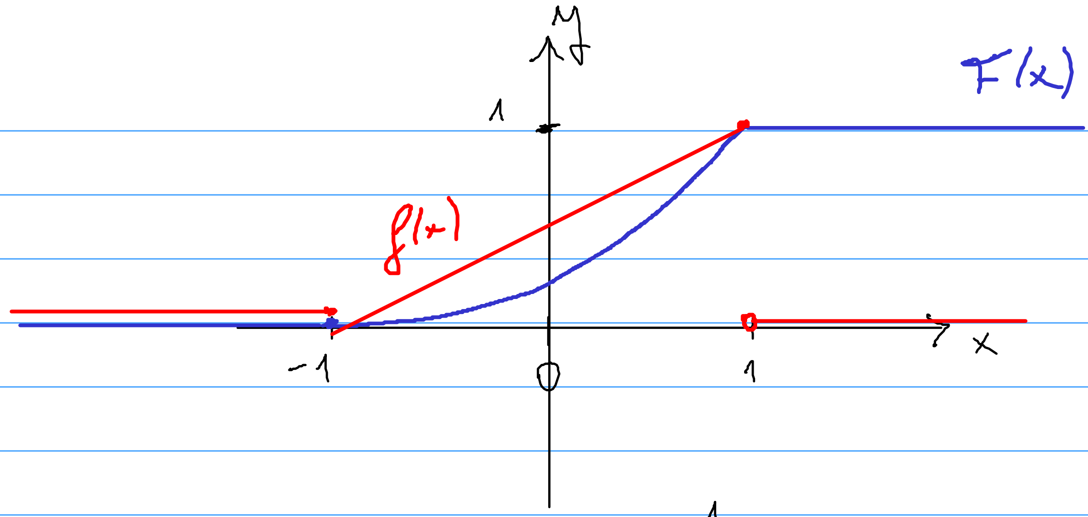
$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{x-(-1)}{2} = \frac{x+1}{2} & x \in [-1, 1] \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$$F(x) \overset{*}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{4} & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin [-1, 1] \\ \frac{x+1}{2} & \text{ha } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$x = 1$ kivételével

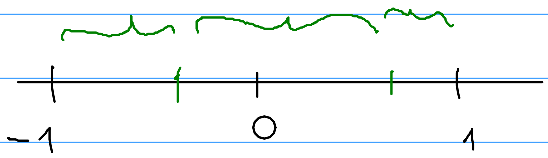


$$E(M) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{x+1}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 + x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{3} + \frac{1-1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$E(M) = \frac{1}{3}.$$



$$E(M^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$D^2(M) = E(M^2) - E(M)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$D(M) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevéssel. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

20 piros
30 fehér } 20-at visszatevéssel   X: pirosak száma

X lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, 20$.

$$P(X=k) = \binom{20}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k}$$

hányszor

binomiális!

eloszlás$(20, \frac{2}{5})$

pontosan k pirosat

hol van a k piros

megfelelő k helyen piros

maradék $(20-k)$ helyen fehér

siker valószínűsége (a figyelt esemény valószínűsége)

1. 2. 3. ... 19. 20.

k db piros kiválasztása: $\binom{20}{k}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{20} k \cdot P(X=k) =$$

$$X = I_1 + \dots + I_{20} \qquad I_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik húzás piros} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$E(X) = E(I_1 + \dots + I_{20}) = 20 \cdot P(\text{első húzás piros}) = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8.$$

$E(X) = n \cdot p$

$D^2(X) = n \cdot p(1-p)$

$$D^2(X) = D^2(I_1 + \dots + I_{20}) =$$

$$= D^2(I_1) + \dots + D^2(I_{20}) = 20 \cdot D^2(I_1)$$

$$= 20 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}.$$

$I_1, I_2, \ldots, I_{20}$ függetlenek

$D(I_1) = E(I_1^2) - (E(I_1))^2 = E(I_1) - (E(I_1))^{20}$

$I_1^2 = I_1$

$= \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}.$

4. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

Legyen a pirosak száma: Y

Y lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, 20$

30 fehérből $(20-k)$-t

$$P(Y=k) = \frac{\binom{20}{k}\cdot\binom{30}{20-k}}{\binom{50}{20}}$$

← kedvező

← összes: 50 golyóból 20-at.

20 pirosból k-t

lottóhúzás

‖ hipergeometriai eloszlás

$$E(Y) = \frac{2}{5}\cdot 20 = 8$$ ← megérzés

$$= \sum_{k=0}^{20} k\cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{20} k\cdot \frac{\binom{20}{k}\binom{30}{20-k}}{\binom{50}{20}}$$

$$k\cdot\binom{20}{k} = 20\cdot\binom{19}{k-1} \quad \Bigg| \quad = \frac{1}{\binom{50}{20}}\sum_{k=1}^{20} 20\binom{19}{k-1}\cdot\binom{30}{20-k}$$

$k-1=l$

$$= \frac{20}{\binom{50}{20}}\cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{19}\binom{19}{l}\cdot\binom{30}{19-l}}_{\binom{49}{19}} = \frac{20}{\binom{50}{20}}\cdot\binom{49}{19} \overset{(*)}{=}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{20} P(Y=k) = \sum_{k=0}^{20} \frac{\binom{20}{k}\binom{30}{20-k}}{\binom{50}{20}}$$

$$\Rightarrow \binom{50}{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot \binom{30}{20-k}$$

$$\left[\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} \right]$$

$$20\binom{50}{20} = 50 \cdot \binom{49}{19} \qquad \overset{(*)}{=} \frac{20}{\cancel{\binom{50}{20}}} \cdot \underbrace{\frac{20}{50}\cancel{\binom{50}{20}}}_{=\binom{49}{19}} = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8.$$

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{20} k^2 \cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{20} k^2 \cdot \frac{\binom{20}{k}\binom{30}{20-k}}{\binom{50}{20}} = \ldots \text{HF}$$

$$k^2\binom{20}{k} = \left(k(k-1) + k\right)\binom{20}{k} = 20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{k-2} + 20\binom{19}{k-1}$$

$$k \cdot (k-1)\binom{20}{k} = 20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{k-2}$$

$$Y = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{20} \quad \text{ahol} \quad \xi_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i\text{-edik piros} \\ 0 & \text{küt} \end{cases}$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{20} E(\xi_i) = \sum_{i=1}^{20} P(\xi_i = 1) = 20 \cdot \frac{2}{5}.$$

$$P(\xi_i = 1) = P(i\text{-edik piros}) = \frac{2}{5}$$

$$P(1.\text{ piros}) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

$$D^2(Y) = D^2\left(\sum_{i=1}^{20} \xi_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum \xi_i, \sum \xi_i\right)$$

Nem független!

$$= \sum_i \sum_j \mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) + \sum_{j=1}^{20} \mathrm{Cov}(\xi_j, \xi_j)$$

$$\mathrm{Cov}(\xi_j, \xi_j) = D^2(\xi_j) = E(\xi_j^2) - (E(\xi_j))^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$i \neq j$

$$\mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i \xi_j) - \underbrace{E(\xi_i)}_{\frac{2}{5}} \underbrace{E(\xi_j)}_{\frac{2}{5}}$$

$$E(\xi_i \xi_j) = P(\xi_i = 1, \xi_j = 1) = P(i\text{ és } j\text{ húzás piros})$$

$$= \frac{20 \cdot 19}{50 \cdot 49}$$

$$\sigma^2(y) = 20 \cdot 19 \cdot \left[\frac{20 \cdot 19}{50 \cdot 49} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \right] + 20 \cdot \left(\frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \right) .$$

//

5. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt fognak majd érni, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

(a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan menynyit fog majd érni a portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?

(b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és varianciáját!

(c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

6. Legyen a X véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$.

(a) Határozzuk meg c értékét!

(b) Adjuk meg X várható értékét (ha létezik)!

(c) Mennyi $\mathbf{P}(X > 4)$?

(d) Legyen $Y = 1/X$. Adjuk meg Y eloszlás–, és sűrűségfüggvényét!