A sztochasztika alapjai

6. feladatsor: véletlen változók, várható érték

1. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám eloszlását, várható értékét!

X: kihúzott legnagyobb szám

Lehetséges értékei: $5, 6, \dots, 89, 90$

$$P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} \qquad k \in \{5, 6, \dots, 90\}$$

$$\underbrace{1.\quad 2.\quad \dots\quad (k-1)}_{\text{innen kihúzunk 4-et}}\quad k.\quad \dots\quad 89.\quad 90.$$

$$\sum_{k=5}^{90} P(X=k) = \sum_{k=5}^{90} \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} = 1$$

$$\Rightarrow \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \dots + \binom{89}{4} = \binom{90}{5}$$

0. 1

1. $1 \quad 1$

2. $1 \quad 2 \quad 1$

$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

4. $\binom{4}{0}1 \quad \binom{4}{1}4 \quad \binom{4}{2}6 \quad \binom{4}{3}4 \quad \binom{4}{4}1$

$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad \binom{5}{4}5 \quad 1$

$6=\binom{6}{5}$

$21=\binom{7}{5}$

$\vdots$

83. $\binom{89}{4} \quad \binom{89}{5}$

90. $\binom{90}{5}$

Hokiütő-szabály

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

$E(X)=47{,}5$, 70–75, $\frac{5}{6}\cdot 90=75$ $\quad$ tipp

$\underbrace{\underbrace{\ }_{5} \ldots \underbrace{\ }_{90}}$

1. ... 50.

megérzés

5 szám $\Rightarrow$ 6 részre osztja (1–90)-et

közelítőleg egyforma részekre

$\Rightarrow E(X) \approx \frac{5}{6}\cdot 90 = 75$

$$E(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=5}^{90} i \cdot P(X=i)$$

X diszkrét $x_1, x_2, \dots$

$$E(X) = \sum_i P(X=x_i)\cdot x_i$$

$$= \sum_{i=5}^{90} i \cdot \frac{\binom{i-1}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot \sum_{i=5}^{90} i \cdot \binom{i-1}{4} = \frac{5}{\binom{90}{5}} \cdot \underbrace{\sum_{i=5}^{90} \binom{i}{5}}_{=\binom{91}{6}} \overset{(*)}{=}$$

Hokiütő

$$\boxed{i\binom{i-1}{4} = \frac{i\cdot(i-1)\cdots(i-4)}{4!} = \binom{i}{5}\cdot 5}$$

$$\underbrace{i\cdot\binom{i-1}{4}}_{\text{vezető + 4 csapattag}} = \underbrace{5\cdot\binom{i}{5}}_{\text{i fős osztályból kiválasztok egy 5 fős csapatot, és ott egy vezetőt}}$$

$$\boxed{(n+1)\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}\cdot(k+1)}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{5}{\binom{90}{5}}\cdot\binom{91}{6} = \frac{5}{6}\cdot 91.$$

$$6\binom{91}{6} = 91\cdot\binom{90}{5}$$

2. Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4}, & \text{ha } x \geq 10, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg a szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

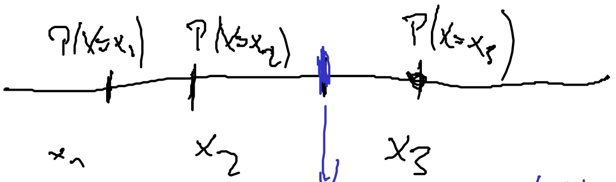
X: szelep élettartama

Emlékeztető: $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$

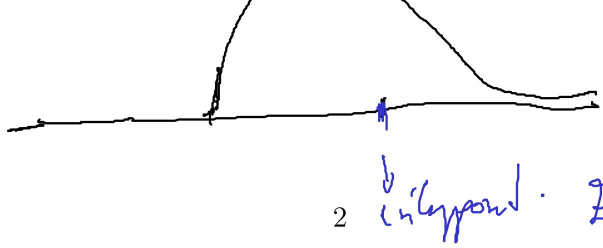
eloszlásfgv $x \in \mathbb{R}$

X folytonos, f sűrűségfgv.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy$$



súlypont: $E(X) = \sum' x_i P(X=x_i)$



súlypont: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy$

X relé élettartama

$P(\text{a relé 20 napot túlél}) = P(X > 20)$

$= 1 - P(X \leq 20) = 1 - \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$

$P(X \leq 20) = \int_{-\infty}^{20} f(y)\,dy = \int_{10}^{20} \frac{3000}{x^4}\,dx$

$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4} & x \geq 10 \\ 0 & \text{külö} \end{cases}$

$= 3000 \cdot \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{10}^{20} =$

$= 3000\, \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{8000}\right)$

$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$

$P(X \in A) = \int_A f(y)\,dy$

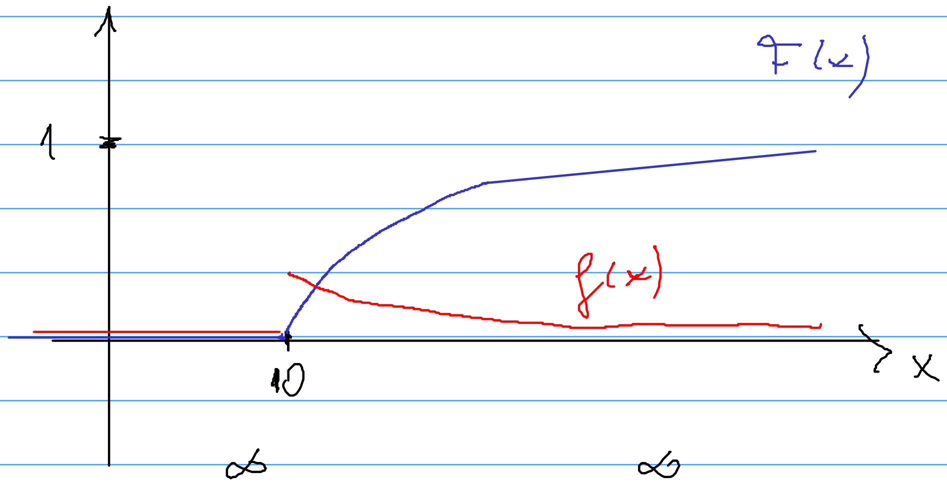
$P(X > 20) = \int_{20}^{\infty} f(y)\,dy = \int_{20}^{\infty} \frac{3000}{y^4}\,dy = 3000 \left[-\frac{y^{-3}}{3}\right]_{20}^{\infty}$

$= \frac{1}{8}.$

eloszlásfgv.: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ \int_{10}^{x} \frac{3000}{y^4}\,dy & x \geq 10 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 10 \\ 1 - \frac{1000}{x^3} & \text{ha } x \geq 10. \end{cases}$$

$x \geq 10$: $\int_{10}^{x} \frac{3000}{y^4}\,dy = 3000 \cdot \left[\frac{y^{-3}}{-3} \right]_{10}^{x} = 1 - \frac{1000}{x^3}.$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{10}^{\infty} x \cdot \frac{3000}{x^4}\,dx$$

$$= \int_{10}^{\infty} \frac{3000}{x^3}\,dx = 3000 \cdot \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{10}^{\infty}$$

$$= 3000 \cdot \left(\lim_{x \to \infty} \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{10^{-2}}{2} \right) = \frac{3000}{200} = 15.$$

$$\int_1^{\infty} h(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} h(x)\,dx$$

Szórásnégyzet: $D^2(X) = E\Big[\big(\underset{\text{véletlen}}{X} - \underset{\text{determin. szám}}{E(X)}\big)^2\Big]$

$$= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$D(X) = \sqrt{E\big((X-E(X))^2\big)}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx.$$

$g(x) = x^2$

előadáson volt állítás

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{10}^{\infty} x^2 \frac{3000}{x^4}\,dx$$

$$= 3000\cdot \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 3000\cdot\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{10}^{\infty}$$

$$= \frac{3000}{10} = 300.$$

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 300 - 15^2 = 300 - 225$$

$$= 75.$$

$$D(X) = \sqrt{75}$$

3. Jelölje S_n a fixpontok számát n elem véletlen permutációja során! Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását! (Segítség: Ne próbáljuk meghatározni az eloszlást.)

$S_n =$ fixpontok száma

lehetséges értékei: $0, 1, 2, \ldots, n.$

párosítási probléma:

$P(S_n = 0) =$ bonyolult alternáló összeg

$P(S_n = k) =$ —||—

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) \cdot k = \text{még bonyolultabb.}$$

$$S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

indikátor változó → $I_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \text{ fix} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

várható érték tulajdonsága (iv).

$$E(S_n) = E(I_1 + \ldots + I_n) = E(I_1) + \ldots + E(I_n) = 1$$

összeg várható értéke mindig várható értékek összege

$$E(I_k) = 1 \cdot P(I_k = 1) + 0 \cdot P(I_k = 0) = P(I_k = 1)$$

$I_k = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ $\quad = P(k \text{ fix}) = \dfrac{1}{n}.$

$$D^2(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2 = 2 - 1^2 = 1$$

$$E(S_n^2) = E\left[(I_1 + \dots + I_n)^2\right]$$

$$= E\left(I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 + 2I_1I_2 + 2I_1I_3 + \dots + 2I_{n-1}I_n\right) \overset{(*)}{=}$$

$$E(I_k^2) = E(I_k) = \frac{1}{n}.$$

$$E(I_k) = \frac{1}{n}$$

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \text{ fix} \\ 0 & \text{kül} \end{cases} \qquad I_k^2 = I_k$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} E(I_i^2) + 2 \cdot \sum_{i<j} E(I_i I_j)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n(n-1)} = 2$$

$i<j$ $$E(I_i I_j) = 1 \cdot P(I_i I_j = 1) = P(i \text{ és } j \text{ is fix}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$I_i I_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \text{ és } j \text{ fix} \\ 0 & \text{kül} \end{cases}$$

i_o j_o $\in 1$

i j

$n \cdot (n-1)$

4. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Jelölje X azt az időt amennyit a hamarabb végző lány vár a másikra! Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

geometriai val. mező

X: hamarabb végző vár

$\Omega = [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$

Anna végez $2+u$ $\quad u \in [0,1]$

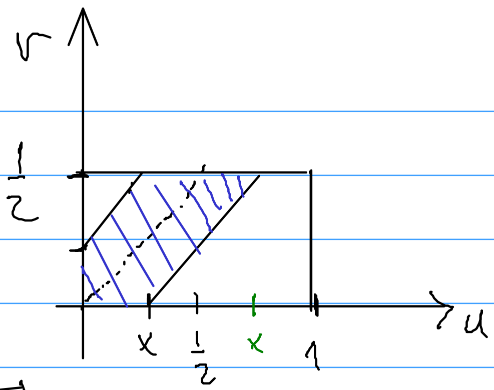
Szabina végez: $2+v$ $\quad v \in [0, \frac{1}{2}]$

$X(u,v) = |u-v|$

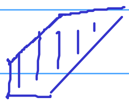
$X : \Omega \to \mathbb{R}$

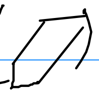
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ ? & \\ 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

$x \in (0,1)$:



$x < \frac{1}{2}$

$\{X \leq x\} =$ 

$P(X \leq x) = \dfrac{\text{Leb}(\ \ )}{\text{Leb}(\Omega)}$ 

$1 > x > \frac{1}{2}$ $\qquad F(x) = \ldots$

5. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kiveszek 4 cipőt. Jelölje X a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

6. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!