Valószínűségszámítás

3. feladatsor: Feltételes valószínűség, függetlenség

Megoldások

1. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

Megoldás. Jelölje A, B, C azt, hogy az első, második, vagy harmadik borítékot választotta Aladár, E pedig az, hogy ezerforintost húzott. Ekkor A, B, C teljes eseményrendszer, hiszen diszjunktak (pontosan egy borítékot választ), és lefedik az eseményteret (választ borítékot). A feladat szerint minden borítékot egyforma valószínűséggel választ, azaz

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{3},$$

továbbá az egyes borítékokból húzva az ezres valószínűsége

$$\mathbf{P}(E|A) = 1, \quad \mathbf{P}(E|B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(E|C) = \frac{1}{4}.$$

Tehát (formálisan a teljes valószínűség tételét használjuk)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(E|A) + \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(E|B) + \mathbf{P}(C) \cdot \mathbf{P}(E|C) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

2. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha

(a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;

(b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;

(c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;

(d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

Megoldás. Definíció szerint

$$\mathbf{P}(A|B_i) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_i)}{\mathbf{P}(B_i)},$$

tehát ezeket a valószínűségeket kell meghatározni.

(a) Azt vizsgáljuk, hogy milyen lapokat kaptunk. Mivel 52 lap közül kapunk 13-at, ezért az összes esetek száma

$$\binom{52}{13}.$$

Ha van legalább egy ász, akkor vagy pontosan egy, vagy pontosan 2, vagy pontosan 3, vagy pontosan 4 ászunk van. (A 'legalább'-ot mindig szét kell szedni 'pontosan'-ok uniójára.) Ennél egyszerűbb, ha áttérünk a komplementer számolására, hiszen az azt jelenti hogy nincs ászunk. Tehát a kedvezőtlen/rossz esetek száma

$$\binom{48}{13},$$

hiszen ekkor a 48 nemász lap közül kaphatunk. Tehát

$$\mathbf{P}(B_1) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

Az $A \cap B_1$ esemény azt jelenti, hogy A és B_1 is bekövetkezik. Ez $A \cap B_1 = A$, azaz pontosan 2 ászunk van. Ennek a valószínűsége

$$\mathbf{P}(A \cap B_1) = \mathbf{P}(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}},$$

hiszen az összes eset maradt, a kedvezőnél pedig a 4 ász közül választunk 2-t, a maradék 11 lapot pedig a 48 nemász közül kapjuk. Összegezve

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_1)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}}{1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13} - \binom{48}{13}}.$$

(b) Most is csak az érdekel, hogy milyen lapok vannak nálunk. Tehát az összes eset

$$\binom{52}{13}.$$

A B_2 eseménynél a kedvező esetek azok, amikor a kőr ászt kivettuk magunknak, és a maradék 51 lapból választunk 12-t, azaz

$$\binom{51}{12}.$$

Vagyis a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(B_2) = \frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}}.$$

Az $A \cap B_2$ esemény azt jelenti, hogy nálunk van a kőr ász, és még pontosan egy ász van nálunk. A kedvező esetek száma

$$\binom{3}{1}\binom{48}{11},$$

hiszen a 3 ászból választunk egyet, a nemászok közül pedig 11-et. Tehát

$$\mathbf{P}(A \cap B_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}},$$

ahonnan a keresett feltételes valószínűség

$$\mathbf{P}(A|B_2) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_2)}{\mathbf{P}(B_2)} = \frac{\binom{3}{1}\binom{48}{11}}{\binom{51}{12}}.$$

(c) Most olyan eseményre kérdez rá a feladat, amiben van első lap. Amikor az összes eset $\binom{52}{13}$ akkor van a kezünkben 13 lap, de nincs sorrendje, tehát nincs első lap. Tehát azon a valószínűségi mezőn, amin az (a–b) részben dolgoztunk, a B_3 esemény nem vizsgálható. Olyan mező kell, amiben van első lap, meg 12 másik. Ekkor az összes esetek száma

$$\binom{52}{13} \cdot 13,$$

hiszen kivettem a 13 lapot, és abból kijelöltem, hogy melyik volt az első. (Ez persze ugyanaz, mint $52 \cdot \binom{51}{12}$.) A kedvező esetek száma a B_3 eseménynél

$$4 \cdot \binom{51}{12},$$

hiszen az első lap a 4 ász közül valamelyik, a többi meg akármi lehet. Tehát

$$\mathbf{P}(B_3) = \frac{4 \cdot \binom{51}{12}}{\binom{52}{13} \cdot 13} = \frac{1}{13}.$$

Persze, hiszen annak a valószínűsége, hogy egyetlen lap éppen ász az $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Az $A \cap B_3$ esemény azt jelenti, hogy az első lap ász, és még pontosan egy ászt kapunk. A kedvező esetek száma

$$4 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{48}{11},$$

hiszen az első ász 4-féle lehet, után a 3 megmaradt ászból kell egy, és a 48 nemászból pedig 11. Tehát

$$\mathbf{P}(A \cap B_3) = \frac{4 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13} \cdot 13},$$

így a keresett feltételes valószínűség

$$\mathbf{P}(A|B_3) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_3)}{\mathbf{P}(B_3)} = \frac{\frac{4 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13} \cdot 13}}{\frac{1}{13}} = \frac{12 \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}.$$

(d) Megint van első lap, ezért a (c)-részbeli mezőn vagyunk. Annak a valószínűsége, hogy az első lap a kőr ász 1/52, hiszen 52 lapból választunk egyet, tehát

$$\mathbf{P}(B_4) = \frac{1}{52}.$$

Az $A \cap B_4$ azt jelenti, hogy az első lap a kőr ász, és utána még pontosan egy ászt kapunk. Az összes esetek száma

$$\binom{52}{13} \cdot 13,$$

a kedvező esetek száma pedig

$$1 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{48}{11},$$

hiszen az első lap csak a kőr ász lehet, után pedig 1 ászt húzunk 3 közül, és a 48 nemász közül 11-et. Így

$$\mathbf{P}(A \cap B_4) = \frac{3 \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13} \cdot 13}.$$

A keresett feltételes valószínűség

$$\mathbf{P}(A|B_4) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_4)}{\mathbf{P}(B_4)} = \frac{\frac{3 \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13} \cdot 13}}{\frac{1}{52}} = \frac{12 \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}.$$

3. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

Megoldás. Ez tipikus Bayes-tételes feladat. Jelölje A, B, C azt, hogy ki sütötte a süteményt, R pedig azt, hogy rossz a sütemény. Ekkor

$$\mathbf{P}(A) = 0,5, \quad \mathbf{P}(B) = 0,3, \quad \mathbf{P}(C) = 0,2,$$

valamint

$$\mathbf{P}(R|A) = 0,02, \quad \mathbf{P}(R|B) = 0,03, \quad \mathbf{P}(R|C) = 0,05,$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy rossz süteményt milyen valószínűséggel készített A szakács, azaz $\mathbf{P}(A|R)$. Definíció szerint

$$\mathbf{P}(A|R) = \frac{\mathbf{P}(A \cap R)}{\mathbf{P}(R)}.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy sütemény rossz

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R) &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(R|A) + \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(R|B) + \mathbf{P}(C) \cdot \mathbf{P}(R|C) \\ &= 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,029,\end{aligned}$$

és

$$\mathbf{P}(R \cap A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(R|A) = 0,01.$$

Tehát

$$\mathbf{P}(A|R) = \frac{0,01}{0,029} = \frac{10}{29}.$$

4. A koronavírus teszt hatékonysága függ attól, hogy a fertőzött hány napja kapta el a betegséget. Tegyük fel, hogy a fertőzés minden esetben 12 napig tart (ez kb. igaz, ezért van 14 nap karantén). Ha a fertőzött $1-3$ napja kapta el a betegséget, akkor a teszt ezt nem tudja kimutatni, ha $4-5$ napja, akkor $0,5$ valószínűséggel mutatja ki, ha $6-12$ napja, akkor $0,75$ valószínűséggel (ez nagyjából stimmel). Feltehetjük, hogy egy fertőzött egyén az elmúlt 12 nap bármelyikén egyforma valószínűséggel fertőződött meg.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött egyén tesztje negatív?

(b) Mivel ez így nem túl hatásos, a következő a szokásos eljárás. A vizsgálandó egyént letesztelik, majd karanténba küldik (ahol elvileg nem fertőződhet meg), és két nap múlva újra letesztelik. Csak akkor engedik ki a karanténból, ha mindkét tesztje negatív. Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött mindkét tesztje negatív, és még mindig fertőző? (Vegyük észre, hogy a betegünk a második teszt után meggyógyulhatott, ha elég régen fertőződött meg.)

Megoldás. (a) Aszerint kell felbontani az eseményteret, hogy a beteg hány napja fertőződött meg. Jelölje A, B, C azt az eseményt, hogy a beteg $1-3$, $4-5$, $6-12$ napja beteg, T pedig azt, hogy a teszt pozitív. Ekkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{12}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{2}{12}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{7}{12}.$$

A teszt hatékonysága

$$\mathbf{P}(T|A) = 0, \quad \mathbf{P}(T|B) = 0,5, \quad \mathbf{P}(T|C) = 0,75.$$

Annak a valószínűsége, hogy pozitív a teszt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T) &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(T|A) + \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(T|B) + \mathbf{P}(C) \cdot \mathbf{P}(T|C) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0,5 + \frac{7}{12} \cdot 0,75 = 0,52,\end{aligned}$$

azaz annak a valószínűsége, hogy egy fertőzött tesztje negatív

$$\mathbf{P}(\text{negatív a teszt}) = 1 - \mathbf{P}(T) = 0,48,$$

ami tényleg nem túl hatékony.

(b) Most tovább kell osztani az eseményteret, hiszen ha a beteg az első teszt előtt $1-3$ nappal fertőződött meg, akkor a második teszt napján már $3-5$ napja beteg. Az viszont nem mindegy, hogy 3 vagy 5, hiszen más a teszt hatékonysága. Jelölje C_i azt azt eseményt, hogy a beteg az első teszt előtt i nappal betegedett meg, ahol $i = 1, 2, \ldots, 12$. Ekkor

$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{12}, \quad i = 1, \ldots, 12.$$

Jelölje N azt az eseményt, hogy mindkét teszt negatív lett és még beteg a második teszt után is. Mivel pontosan 12 napig tart a betegség, ezért ha valaki az első teszt előtt 11 nappal fertőződött meg, akkor a második teszt után már egészséges. Azaz, ekkor nem kell számolgatni,

$$\mathbf{P}(N|A_{11}) = \mathbf{P}(N|A_{12}) = 0.$$

Ha A_3 követekezett be, azaz az első teszt előtt 3 napja fertőződött meg a beteg, akkor az első teszt biztos negatív. A másod tesztkor már 5 napja beteg, így az 0,5 valószínűséggel negatív. Azaz

$$\mathbf{P}(N|A_3) = 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$

A többi eset hasonlóan számolható:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(N|A_1) = 1,\\
&\mathbf{P}(N|A_2) = \mathbf{P}(N|A_3) = 1 \cdot 0,5 = 0,5,\\
&\mathbf{P}(N|A_4) = \mathbf{P}(N|A_5) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125,\\
&\mathbf{P}(N|A_i) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625, \quad i = 6,7,\dots,10.
\end{aligned}$$

Összegezve

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N) &= \sum_{i=1}^{12} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(N|A_i)\\
&= \frac{1}{12}(1 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,125 + 5 \cdot 0,0625 + 2 \cdot 0) = 0,21.
\end{aligned}$$

Ez már lényegesen jobb, de 100 fertőzöttből 20 még mindig átcsúszik. Azt is vegyük észre, hogy 16 már felgyógyul ($1/6 = \mathbf{P}(A_{11} \cup A_{12})$ a valószínűsége, hogy a második teszt idejére már letelt a 12 nap), tehát a 2 negatív teszt feltétel az valójában 84 betegből szűr ki 64-et.

9. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $\lambda h + o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött! (A $f(h) = o(h)$ ('kis ordó h') jelentése $\lim_{h\to 0} f(h)/h = 0$.)

Megoldás. Jelölje A_t az az eseményt, hogy az alkatrész legalább t ideig működik. Ekkor $\mathbf{P}(A_t) = p(t)$. Világos, hogy $A_t \supset A_s$ ha $s > t$, hiszen ha s-ig működött, akkor t-ig is. Az az esemény, hogy meghibásodik a $(t, t+h)$-ben $A_t \backslash A_{t+h}$. Tehát

$$\mathbf{P}(A_t \backslash A_{t+h}|A_t) = \lambda h + o(h).$$

A feltételes valószínűség definíciója, és a valószínűség tulajdonságai szerint

$$\mathbf{P}(A_t \backslash A_{t+h}|A_t) = \frac{\mathbf{P}(A_t \backslash A_{t+h})}{\mathbf{P}(A_t)} = \frac{\mathbf{P}(A_t) - \mathbf{P}(A_{t+h}}{\mathbf{P}(A_t)} = \frac{p(t) - p(t+h)}{p(t)}.$$

Visszaírva és átrendezve kapjuk, hogy

$$p(t) - p(t+h) = p(t)\lambda h + p(t)o(h).$$

Osszunk le h-val, majd vegyük a $h \to 0$ határmenetet. Ekkor a derivált és a $o(h)$ definíciója szerint

$$\lim_{h\to 0} \frac{p(t) - p(t+h)}{h} = p'(t), \quad \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0,$$

így
$$-p'(t) = \lambda p(t).$$
Ennek a megoldása $p(t) = Ce^{-\lambda t}$. Valóban, szorozzunk át $e^{\lambda t}$-vel
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\lambda t}p(t)) = \lambda e^{\lambda t}p(t) + e^{\lambda t}p'(t) = \lambda e^{\lambda t}p(t) + e^{\lambda t}(-\lambda p(t)) \equiv 0,$$
ahonnan adódik, hogy $p(t) = Ce^{-\lambda t}$. Mivel $p(t)$ valószínűség, és $p(0) = 1$, ezért $C = 1$, tehát
$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

10. A sztochasztika tanszék egyik oktatója p valószínűséggel szokott bejönni a tanszékre. Ha ismerőseinek azt mondta, hogy aznap bejön, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k-an keresik telefonon $e^{-\mu}\mu^k/k!$, ha pedig azt mondta, hogy nem, akkor $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \ldots$, $0 < \lambda < \mu$. Feltéve, hogy k hívás érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy aznap bent volt az oktató? Vizsgáljuk a $k \to \infty$ esetet.

Megoldás. Jelölje A_k azt az eseményt, hogy pontosan k-an keresik telefonon, B pedig azt, hogy bejön. Ekkor
$$\mathbf{P}(B) = p, \quad \mathbf{P}(A_k|B) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, \quad \mathbf{P}(A_k|B^c) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$
A kérdés
$$\mathbf{P}(B|A_k) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A_k)}{\mathbf{P}(A_k)},$$
ahol
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_k) &= \mathbf{P}(A_k \cap B) + \mathbf{P}(A_k \cap B^c) \\ &= \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A_k|B) + \mathbf{P}(B^c)\mathbf{P}(A_k|B^c) \\ &= p\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} + (1-p)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.\end{aligned}$$
Tehát
$$\mathbf{P}(B|A_k) = \frac{p\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}}{p\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} + (1-p)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} = \frac{pe^{-\mu}}{pe^{-\mu} + (1-p)(\lambda/\mu)^k e^{-\lambda}}.$$
Mivel $\lambda < \mu$
$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(B|A_k) = 1.$$
Ez valahogy logikus, mert többen keresik akkor, ha azt mondja, hogy bejön. Ha nagyon sokan keresik, akkor egyre valószínűbb, hogy bent van.

15. A parti tüzérség 1 km távolságban felfedez egy ellenséges cirkálót, és elkezd rá tüzelni, percenként egy lövést adva le. A cirkáló az első lövés leadásakor menekülni kezd 60 km/h sebességgel. A találat valószínűsége x km távolság esetén $0,75\,x^{-2}$. Ha egy lövés talált, akkor még mindig $1/4$ valószínűséggel a cirkáló nem süllyed el, és tovább menekül. Mekkora valószínűséggel menekül el a cirkáló?

Megoldás. Ez egy nehéz feladat.

Jelölje A_n az azt eseményt, hogy a cirkáló túléli az n-edik lövést. Nyilván $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ monoton csökkenő halmazsorozat, és ha A az az esemény, hogy elmenekül, akkor

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

A valószínűség tulajdonságai szerint

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Nyilván

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \quad \text{(nem talál, vagy talál, de nem süllyed).}$$

Hasonlóan,

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_{n-1}) \left(1 - \frac{3}{4n^2} + \frac{3}{4n^2}\frac{1}{4}\right) = \mathbf{P}(A_{n-1}) \left(1 - \frac{9}{16n^2}\right).$$

Innen indukcióval

$$\mathbf{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{9}{16k^2}\right),$$

és így a limesz esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(A) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{9}{16k^2}\right).$$

A valószínűségszámítás része kész a feladatnak. De ez mennyi?

A Stirling-formula szerint (ezt egy kicsit később belátjuk, de biztos előkerült valamiből korábban)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad \text{amint } n \to \infty.$$

Most egy egyszerű, de elég macerás számolás jön. Vezessük be szemifaktoriális jelölést:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1), (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n\, n!.$$

Mivel
$$1-\frac{9}{16k^2}=\frac{(4k-3)\cdot(4k+3)}{16k^2},$$
így, a Stirling-formulát beírva
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}((4k-3)\cdot(4k+3)) &= \frac{(4n+3)!!}{3(4n+1)}=\frac{(4n+3)!}{3(4n+1)2^{2n+1}(2n+1)!}\\ &\sim \frac{1}{3(4n+1)2^{2n+1}}\frac{(\frac{4n+3}{e})^{4n+3}\sqrt{2\pi(4n+3)}}{(\frac{2n+1}{e})^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}}\\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{3(4n+1)2^{2n+1}e^{2n+2}}\frac{(4n+3)^{4n+3}}{(2n+1)^{2n+1}}.\end{aligned}$$
Ezt beírva
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{9}{16k^2}\right) &\sim \frac{\sqrt{2}}{3(4n+1)2^{2n+1}e^{2n+2}}\frac{(4n+3)^{4n+3}}{(2n+1)^{2n+1}}\cdot\frac{1}{16^n(\frac{n}{e})^{2n}2\pi n}\\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{3(4n+1)2^{2n+1}e^{2}}\frac{(4n+3)^{4n+3}}{(2n+1)^{2n+1}n^{2n}}\cdot\frac{1}{16^n 2\pi n}.\end{aligned}$$
Még gyúrni kell, de minden egyszerű analízis. Egyrészt
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+3)^3}{(4n+1)(2n+1)n}=8.$$
Másrészt
$$\frac{(4n+3)^{4n}}{(2n+1)^{2n}n^{2n}}=2^{6n}\left[\frac{(n+3/4)^2}{(n+1/2)n}\right]^{2n}.$$
A jobb oldalon szereplő második tényező 1^∞ típusú határérték. Az alapot átírva
$$\frac{(n+3/4)^2}{(n+1/2)n}=\frac{n^2+\frac{3}{2}n+\frac{9}{16}}{n^2+\frac{1}{2}n}=1+\frac{n+\frac{9}{16}}{n^2+\frac{1}{2}n}=1+\frac{1}{n}+O(n^{-2}).$$
Tehát
$$\left(\frac{(n+3/4)^2}{(n+1/2)n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}+O(n^{-2})\right)^n\to e.$$
Összegezve,
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{9}{16k^2}\right)\sim\frac{\sqrt{2}\cdot 8\cdot 2^{6n}}{3\cdot 2^{2n+1}e^2 16^n\,2\pi}e^2=\frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3\pi}\approx 0,3$$

Tehát
$$\mathbf{P}(\text{megmenekül a cirkáló}) = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

Ezt máshogy is lehet. Ha p egy valós együtthatós n-ed fokú polinom, és gyökei $x_1, \dots, x_n$, akkor
$$p(x) = p(0) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{x_i}\right).$$

A $\sin x$ függvény zérushelyei 0, $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ezért a fenti előállítás a $\sin x/x$ függvényre a következőt adja:
$$\begin{aligned}\sin x &= x \prod_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) \\ &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Itt persze csaltunk, mert a $\sin x$ az nem polinom. A végtelen szorzat alak a Weierstrass-féle faktorizációs tétel, ami lehet, hogy lesz majd komplex függvénytanból. Innen az $x = 3\pi/4$ helyettesítéssel
$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{9}{16k^2}\right) = \frac{\sin \frac{3}{4}\pi}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3\pi}.$$