A sztochasztika alapjai
10. feladatsor: nevezetes eloszlások

1. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

X: hullócsillagok száma

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

nem látunk hullócsillagot $= \{X=0\}$

$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = \underset{\text{tudjuk}}{0,1}$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\quad \lambda > 0$

$0, 1, 2, \ldots$

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$E(X) = \lambda$

$e^{-\lambda} = 0,1$

$\lambda = \ln 10$

Válasz: $E(X) = \lambda = \underline{\ln 10}$.

2. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)

X : tűzesetek száma (különböző kigyulladt házak száma)

lehetséges értékek: $0, 1, 2, \ldots, 15000$.

$X \sim \text{Binomiális}(15000,\ 0{,}0002)$

$$P(X=2) = (0{,}0002)^{2} \cdot (1-0{,}0002)^{15000-2} \cdot \binom{15000}{2}$$

k k k k

az a kettő kigyullad — a többi nem — melyik 2 ház

$$P(X<4) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$= \sum_{k=0}^{3} (0{,}0002)^{k} (1-0{,}0002)^{15000-k} \cdot \binom{15000}{k}.$$

$$\text{Poisson} \xleftarrow[(n\to\infty)]{} \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \qquad n \text{ nagy}$$

nagy kísérletek száma

megfigyelt esemény valószínűsége

Mi lesz λ?

$$X \sim \text{Bin}(\overbrace{15000}^{n},\ \overbrace{0{,}0002}^{\lambda/n})$$

$$\lambda = 15000 \cdot 0{,}0002 = 3.$$

$Y \sim \text{Poisson}(3)$ közelítés

$$P(Y<4) = P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)$$

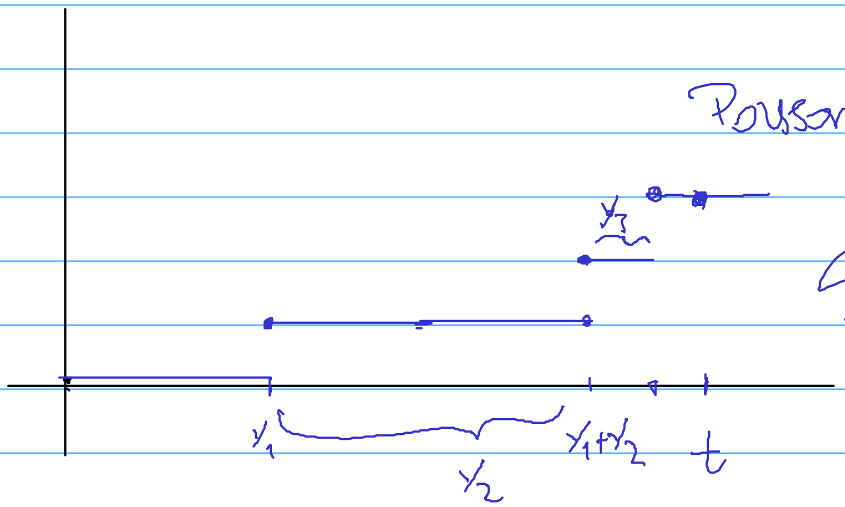
$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 0{,}647$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \qquad E(X)=\lambda$

$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \qquad E(Y)=\frac{1}{\lambda}$

Poisson-folyamat

Sztoch. modell



$Y_1, Y_2, \ldots \sim \text{Exp}(\lambda)$

N_t = szükséges izzócserék száma

$N_t \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$

3. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább még egy évig fog működni egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

X: villanykörte élettartama

$X \sim Exp(\lambda)$

$$X \sim Exp(\lambda)$$
$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

legalább 1 évig működik =

$= \{X \geq 1\}$

$$P(X \geq 1) = \int_1^\infty e^{-\lambda x} dx = 1 - F(1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-\lambda}.$$

átlagosan 2 évig működik: $E(X) = 2 = \frac{1}{\lambda}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$$

$$P(X \geq 1) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Legalább még egy évig egy már fél éve működő

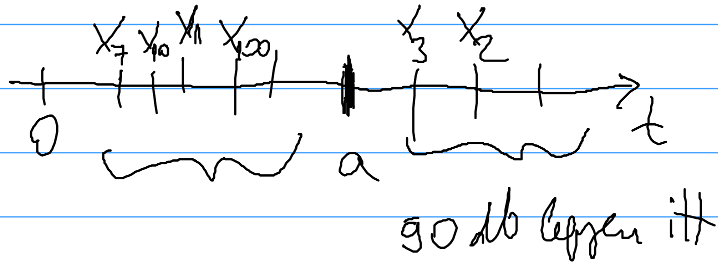
$$P\left(X > \frac{1}{2} + 1 \,\middle|\, X > \frac{1}{2}\right) = P(X > 1) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

örökifjú

Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

$$a: \quad \boxed{P(X>a) = 0,9}$$

100 villanykörte: $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ élettartamok



$$P(X>a) = 0,9$$

$$\shortparallel$$

$$1 - F(a) = e^{-\frac{1}{2}\cdot a}$$

$$e^{-\frac{a}{2}} = 0,9$$

$$a = 2\cdot \ln\frac{1}{0,9} = 2\cdot \ln\frac{10}{9}.$$

$$\boxed{a = 2\cdot \ln\frac{10}{9}.}$$

4. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$ eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?

X : skót baka mellkasának körmérete

$X \sim N(88, 10)$

$P(X \leq 84) =$

$= P\left(\frac{X-88}{\sqrt{10}} \leq \frac{84-88}{\sqrt{10}} \right)$

$= P\left(Z \leq -\frac{4}{\sqrt{10}} \right)$

$= \Phi\left(-\frac{4}{\sqrt{10}} \right) = \Phi(-1{,}26) =$

standard normális eloszlásfv.

$= 1 - \Phi(1{,}26)$

$= 1 - 0{,}896 = 0{,}104.$

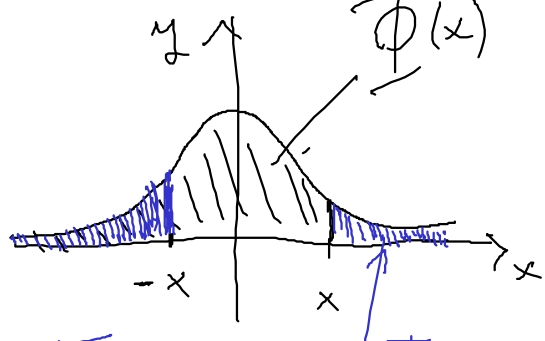
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E(X) = \mu, \quad D^2(X) = \sigma^2$

$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

5. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

X: macska tömege kg-ban

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu, \sigma$ ismeretlen

$$\left.\begin{array}{l} P(X \leq 1{,}5) = 0{,}1 \\ P(X > 7) = 0{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(X > 6) = ?$$

$$P(X \leq 1{,}5) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim Z} \leq \frac{1{,}5-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{1{,}5-\mu}{\sigma}\Big)$$

$$P(X > 7) = P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{7-\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{7-\mu}{\sigma}\Big)$$

$$\begin{cases} \Phi\Big(\frac{1{,}5-\mu}{\sigma}\Big) = 0{,}1 \\ 1 - \Phi\Big(\frac{7-\mu}{\sigma}\Big) = 0{,}2 \Rightarrow \Phi\Big(\frac{7-\mu}{\sigma}\Big) = 0{,}8 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{7-\mu}{\sigma} = 0{,}84}$$

$$\Phi\Big(\frac{1{,}5-\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{\mu-1{,}5}{\sigma}\Big)$$

$$\Rightarrow \Phi\Big(\frac{\mu-1{,}5}{\sigma}\Big) = 0{,}9$$

$$\boxed{\frac{\mu - 1{,}5}{\sigma} = 1{,}28} \longrightarrow \begin{cases} \mu = \dots \\ \sigma = \dots \end{cases}$$

$$P(X > 6) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right) = \dots$$

6. A Texpo áruházakban az i-edik kasszánál egy vásárló percben számolva i paraméterű exponenciális időt tölt el. A kiszolgálási idők az egyes kasszáknál egymástól függetlenek.

- András éppen üresen találja az 1-es kasszát. Mennyi a valószínűsége, hogy 2 percen belül végez?
- Andrással pontosan egyidőben Béla beáll az ugyancsak üres 2-es kasszához. Mennyi a valószínűsége, hogy mindketten 2 percen belül végeznek? Mennyi a valószínűsége, hogy Béla 2 percen belül végez, de András nem?
- Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyikük 2 percen belül végez? Határozzuk meg a hamarabb végző kiszolgálási idejének eloszlását! Tehát András és Béla kiszolgálási idejének a minimumára vagyunk kíváncsiak.
- Mennyi a valószínűsége, hogy András végez hamarabb?