esetként levezetjük a híres Black–Scholes-formulát, ami az európai call opció igazságos árát adja meg.

Legyen $r > 0, \mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, (W_t) SBM a $[0, T]$ intervallumon, $T < \infty$, és $\mathcal{F}_t$ a (W_t)-hez tartozó filtráció. A *Black–Scholes-modellben* a kötvényárfolyamatot és a részvényárfolyamatot a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B_t &= rB_t\,\mathrm{d}t, \quad B_0 = 1, \\ \mathrm{d}S_t &= \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t, \quad S_0 = S_0, \end{aligned} \tag{19}$$

{eq:black-shcholes

differenciálegyenletek határozzák meg.

A kötvényárra $B_t = e^{rt}$ adódik, amit már a korábbiakban is feltettünk.

Exponenciális Brown-mozgás. Az S_t Itô-folyamatként való felírása

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma S_s \mathrm{d}W_s.$$

$f(S_t) - f(S_0) = \int_0^t f'(S_s)\, dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_s)\sigma^2 S_s^2\, ds$

Az $f(x) = \log x$ függvénnyel felírva az Itô-formulát

$= \int_0^t f'(S_s)(\mu S_s\, ds + \sigma S_s\, dW_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_s)\sigma^2 S_s^2\, ds$

$$\begin{aligned} \log S_t &= \log S_0 + \int_0^t \frac{1}{S_s}\left(\mu S_s \mathrm{d}s + \sigma S_s \mathrm{d}W_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 \mathrm{d}s \\ &= \log S_0 + \sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t. \end{aligned}$$

$= \int_0^t \left(f'(S_s)\mu S_s + \frac{1}{2} f''(S_s)\sigma^2 S_s^2\right) ds + \int_0^t f'(S_s)\, \sigma S_s\, dW_s$

Innen kapjuk, hogy

$$S_t = S_0 \cdot e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}, \tag{20}$$

{eq:exp-BM}

innen az elnevezés. A differenciálegyenletes alakból azt is látjuk, hogy ez pontosan akkor martingál, ha a korlátos változású rész $\equiv 0$, azaz $\mu = 0$.

$f'(x)\, x = 1$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás nem teljes, hiszen a logaritmus függvény nem kétszer folytonosan deriválható, a 0-ban nem definiált. Így az előbbi gondolatmenet csak segít megtalálni a megoldást.

$\int_0^t \sigma\, dW_s = \sigma W_t$

legyen $f(x) = \log x$

18. Exercise. Igazoljuk az Itô-formula segítségével, hogy (20) valóban megoldása a differenciálegyenletnek!

$\mu S_s \frac{1}{S_s} + \frac{1}{2}(-1)\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2$

$= \mu - \frac{\sigma^2}{2}.$

(A feladat egy konstruktívabb megoldása az, hogy felírjuk az Itô-formulát egy általános f függvénnyel, majd megválasztjuk úgy az f-et, hogy minél egyszerűbb egyenletet kapjunk. Az $f(x) = \log x$ választás esetén a martingál részben az integrandus a konstans függvény lesz.)

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

$$d\tilde{S}_t = d\left(e^{-rt}S_t\right) = -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}\,dS_t = -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}\left(\mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t\right) = -r\tilde{S}_t\,dt + \mu\tilde{S}_t\,dt + \sigma\tilde{S}_t\,dW_t$$

9.3.1. Ekvivalens martingálmérték és az igazságos ár

Olyan mértéket szeretnénk megadni, mely szerint $(\overline{S}_t)$, a diszkontált részvényár martingál. Ezt a Girsanov-tétel segítségével adjuk meg. A (19) egyenlet alapján rövid számolás után kapjuk, hogy

$$\mathrm{d}\overline{S}_t = \overline{S}_t\left((\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right) = \overline{S}_t \sigma \mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\mu}, \tag{21}$$ {eq:tildeS}

ahol

$$\widetilde{W}_t^{\mu} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t. \tag{22}$$ {eq:tildeW}

Ha találunk egy olyan $\mathbf{P}_\mu$ mértéket mely szerint a $\widetilde{W}_t^{\mu}$ folyamat SBM, akkor a (21) differenciálegyenlet szerint az $(\overline{S}_t)$ folyamat $\mathbf{P}_\mu$-martingál. A Girsanov-tétel éppen ilyen $\mathbf{P}_\mu$ mértéket definiál. Legyen $\theta_t \equiv \theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, és

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_\mu}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \Lambda_T = \exp\left\{-\int_0^T \theta \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2 \mathrm{d}s\right\} = e^{-\theta W_T - \frac{\theta^2 T}{2}}.$$

$$P_\mu(A) = \int_A \Lambda_T\,dP$$

$$P_\mu(\Omega) = E_P(\Lambda_T) \overset{\text{mtg}}{=} E_P(\Lambda_0) = 1$$

A Girsanov-tétel szerint $(\widetilde{W}_t^{\mu})$ éppen $\mathbf{P}_\mu$-SBM, és így $(\overline{S}_t)$ $\mathbf{P}_\mu$-martingál. Mivel $\Lambda_T > 0$ m.b., így $\mathbf{P} \sim \mathbf{P}_\mu$, tehát $\mathbf{P}_\mu$ EMM. Sőt, meg is határozhatjuk az $(\overline{S}_t)$ dinamikáját $\mathbf{P}_\mu$ szerint. Az (21) egyenletet megoldva

EMM szerinti dinamika

$$\overline{S}_t = S_0 \cdot e^{\sigma \widetilde{W}_t^{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} t}. \tag{23}$$ {eq:S-mu}

Megmutatjuk, hogy a Black–Scholes-modellben az igazságos ár a (17) formulában szereplő alsó becslés. Legyen f_T egy tetszőleges olyan követelés, melyre $\mathbf{E} f_T^2 < \infty$. Tekintsük az

$$E\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] = M_t \quad \text{mtg.}$$

hát persze.

$$N_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left[e^{-rT} f_T \mid \mathcal{F}_t\right],\ 0 \le t \le T,$$

$\mathbf{P}_\mu$-martingált. A martingál reprezentációs tétel szerint létezik olyan Y_t adaptált folyamat, hogy

$$N_t = N_0 + \int_0^t Y_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s^{\mu}, \tag{24}$$ {eq:N-def}

ahol persze $N_0 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} e^{-rT} f_T$. Definiáljuk a $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ stratégiát a

$$\beta_t = N_t - \frac{Y_t}{\sigma}, \quad \gamma_t = \frac{Y_t e^{rt}}{\sigma S_t}$$

formulával.

$\beta_t = N_t - \frac{Y_t}{\sigma}$ $\gamma_t = \frac{Y_t e^{rt}}{\sigma S_t}$

10. Lemma. *A ($\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$) stratégia önfinanszírozó, és $\overline{X}_t^\pi = N_t$.*

Bizonyítás. A definíció alapján

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = \left(N_t - \frac{Y_t}{\sigma}\right) e^{rt} + \frac{Y_t}{\sigma} e^{rt} = e^{rt} N_t,$$

$X_T = e^{rt} \overline{X}_T = e^{rT} N_T = f_T$.

azaz $\overline{X}_t^\pi = N_t$.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy π önfinanszírozó, a 7 Állítás szerint azt kell belátni, hogy $\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = \gamma_t \mathrm{d}\overline{S}_t$. Mivel $\overline{X}_t^\pi = N_t$, így (24) alapján

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = \mathrm{d}N_t = Y_t \mathrm{d}\widetilde{W}_t^\mu.$$

Ugyanakkor (21) szerint B-S modell $\Rightarrow$ $d\overline{S}_t = \sigma \overline{S}_t d\widetilde{W}_t$

$$\gamma_t \mathrm{d}\overline{S}_t = \gamma_t \overline{S}_t \sigma \mathrm{d}\widetilde{W}_t^\mu \underset{\gamma \text{ def}}{=} Y_t \mathrm{d}\widetilde{W}_t^\mu,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél használtuk π definícióját. Ezzel az állítást beláttuk. □

Mivel

$$X_T^\pi = e^{rT} N_T = e^{rT} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} \left[e^{-rT} f_T | \mathcal{F}_T\right] = f_T,$$

így a lemma szerint π egy tökéletes f_T-fedezet $X_0^\pi = N_0 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} e^{-rT} f_T$ kezdeti tőkével. Ezzel beláttuk az alábbit.

{tetel:bs-arazas}

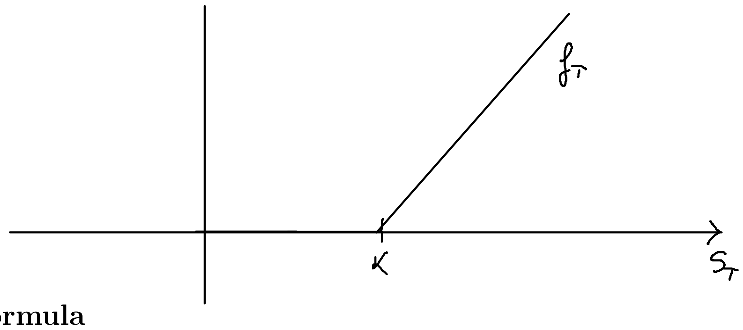
20. Theorem. *A Black–Scholes-modellben egy f_T követelés igazságos ára*

$$C_T(f_T) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} e^{-rT} f_T.$$

Továbbá a $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$,

$$\beta_t = N_t - \frac{Y_t}{\sigma}, \quad \gamma_t = \frac{Y_t e^{rt}}{\sigma S_t},$$

egy tökéletes fedezeti stratégia, ahol $N_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}[e^{-rT} f_T | \mathcal{F}_t]$, és $N_t = N_0 + \int_0^t Y_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s^\mu$.



9.3.2. A Black–Scholes-formula

A Black–Scholes-formula az európai call opció árára vonatkozik. Egy K kötési árú európai call opció kifizetési függvénye $f_T = (S_T - K)_+$. A 20 Tétel szerint az igazságos ár

Áll.: f_T $\mathcal{F}_T$-mh. független a korábbi részvényárfolyamoktól

$$C_T(K) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(e^{-rT}(S_T - K)_+\right).$$

A (23) formula alapján

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} \cdot S_t = \tilde{S}_0 \cdot e^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

$$f_T = \frac{S_{T/2} + S_T}{2}$$

$$S_T = S_0 e^{rT} e^{\sigma \widetilde{W}_T^\mu - \frac{\sigma^2}{2} T},$$

ahol $\widetilde{W}_T^\mu \sim \mathrm{N}(0, T)$ a $\mathbf{P}_\mu$ mérték szerint. Tehát, bevezetve egy Z standard normális véletlen változót

$\tilde{W}_t$ SBM P_μ mérték szerint

- $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, $t > s$
- független növekményű
- minta folytonos
- $W_0 = 0$.

$$Z \sim N(0,1)$$

$$\tilde{W}_T \overset{\mathcal{D}}{=} \sqrt{T} \cdot Z$$

$$\begin{aligned}
C_T(K) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(e^{-rT}(S_T - K)_+\right) \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(S_0 e^{\sigma \widetilde{W}_T^\mu - \frac{\sigma^2}{2} T} - e^{-rT} K\right)_+ \\
&= \mathbf{E}\left(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z - \frac{\sigma^2}{2} T} - e^{-rT} K\right)_+ \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma^\infty \left(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} x - \frac{\sigma^2}{2} T} - e^{-rT} K\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \\
&= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma^\infty e^{-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} \,\mathrm{d}x - e^{-rT} K (1 - \Phi(\gamma)) \\
&= S_0 \left(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})\right) - e^{-rT} K (1 - \Phi(\gamma)),
\end{aligned}$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi(\gamma)$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\log \frac{K}{S_0} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) T\right]. \checkmark$$

$$S_0 e^{\sigma\sqrt{T} Z - \frac{\sigma^2}{2} T} - e^{-rT} \cdot K > 0$$

$$e^{\sigma\sqrt{T} Z} > e^{(\frac{\sigma^2}{2} - r)T} \cdot K S_0^{-1}$$

$$Z > \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(e^{(\frac{\sigma^2}{2} - r)T} \cdot \frac{K}{S_0}\right)$$

A

$$C_T(K) = S_0 \left(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})\right) - e^{-rT} K (1 - \Phi(\gamma))$$

árazási formula a híres *Black–Scholes-formula*, melyet 1973-ban publikált Fischer Black és Myron Scholes. A mögöttes elméletet később Merton általánosította. Munkájukért 1997-ben Scholes és Merton közgazdasági Nobel-díjat kapott, Black azért maradt ki, mert 1995-ben meghalt.

9.4. A CRR-formulától a Black–Scholes-formuláig

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a Black–Scholes árazási formulát megkaphatjuk úgy, mint a homogén binomiális piacon a Cox–Ross–Rubinstein árazási formula határértékét. Ez a rész a [2] jegyzet 2.6 fejezetén alapul. $N \to \infty$

A folytonos modellt a $[0,T]$ intervallumon tekintjük. A folytonosan számított kamatláb $r > 0$, és $\sigma > 0$ rögzített paraméter, a volatilitás. A diszkrét modellben legyen

Folytonos idő σ, r adott

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T, \quad \tau_i = \frac{i}{N} T.$$

$0 \quad \tau_i \quad T$

$B_t = e^{rt}$

$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

Ezek a lehetséges kereskedési időpontok az N-lépéses binomiális modellben. Vezessük be a $T/N = h$ jelölést. Majd az $N \to \infty$ határátmenetet vizsgáljuk. Jelölje $B^N_{\tau_n}, S^N_{\tau_n}$ a kötvény, ill. a részvény árát a τ_n időpontban az N-edik piacon. Az N-lépéses diszkrét idejű homogén binomiális piac paraméterei legyenek r_N, a_N, és b_N.

diszkrét

$B^{(N)}_{n+1} = (1+r_N) B^{(N)}_n$

$S^{(N)}_{n+1} \begin{cases} (1+a_N) S^{(N)}_n & \text{le} \\ (1+b_N) \cdot S^{(N)}_n & \text{fel} \end{cases}$

Most megválasztjuk az r_N, a_N, b_N paramétereket. Legyen $B_0 = 1$. Folytonos időben a kötvényár t-ben $B_t = e^{rt}$. Diszkrét időben a t-hez tartozó osztópont $\tau_{\lfloor tN/T \rfloor}$, ahol $\lfloor x \rfloor$ az x egészrészét jelöli, ezt a későbbiekben elhagyjuk. Tehát

$b_N > a_N$

arb.mentes / teljes $(\Leftrightarrow)$ $a_N < r_N < b_N$

$$e^{rt} = B_t \approx B^N_{\tau_{\frac{tN}{T}}} = (1 + r_N)^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor}.$$

Ha $r_N = rT/N = rh$, akkor a jobb oldal $N \to \infty$ esetén konvergál a bal oldalhoz. Legyen

$$r_N = r\frac{T}{N} = rh. \tag{25}$$ {eq:r-valaszt}

(A későbbiekben említés nélkül többször felhasználjuk, hogy $h = T/N$.) Hasonló okoskodással megmutatható, hogy ahhoz, hogy $\mathbf{Var} S^N_{\tau_N}$ határértéke $N \to \infty$ esetén létezzen, nagyjából az kell, hogy

EMM szerint ?

$\tau^N_n \to t$

HF

$$\log \frac{1 + b_N}{1 + r_N} = \sigma\sqrt{h}, \quad \log \frac{1 + a_N}{1 + r_N} = -\sigma\sqrt{h} \tag{26}$$ {eq:ab-valaszt}

teljesüljön. Az N-edik modellben így választjuk a paramétereket. Belátjuk, hogy ilyen választás mellett a K kötési árú európai call opció binomiális modell alapján számolt igazságos ára $N \to \infty$ esetén a Black–Scholes-árhoz konvergál.

$\tau^N_{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} = \lfloor \frac{tN}{T} \rfloor \cdot \frac{T}{N} \to t$

$T > 0$ fix

A binomiális modellben meghatároztuk az egyértelmű ekvivalens martingálmértéket. Ez az volt, mely szerint a részvényár

$$p^*_N = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N}$$ fel lépés valószínűsége

Legyen: $\begin{cases} r_N = r \cdot \frac{T}{N} \\ a_N = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} (1+r_N) - 1 \\ b_N = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} (1+r_N) - 1 \end{cases}$

Cél: $\lim_{N \to \infty} (1+r_N)^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} = e^{rt} \quad \forall t \in [0,T]$

$\left(1 + \frac{?}{N}\right)^{N \cdot \frac{t}{T}} \to e^{? \cdot \frac{t}{T}}$ $\quad ? \cdot \frac{t}{T} = rt$, $\quad ? = rT$

$\boxed{r_N = \frac{rT}{N}}$

valószínűséggel $(1+b_N)$-szeresére nő, $1-p_N^*$ valószínűséggel $(1+a_N)$-szeresére, és az N-lépés során ezek egymástól függetlenül történnek. Vagyis a részvényár eloszlása a $\mathbf{P}_N^*$ EMM szerint

véletlen $\sim$ Binomiális(N, p_N^*)

$$S_{\tau_N}^N = S_0(1+b_N)^{Y_N}(1+a_N)^{N-Y_N} = S_0\left(\frac{1+b_N}{1+a_N}\right)^{Y_N}(1+a_N)^N,$$

ahol $Y_N \sim \mathrm{Binom}(N, p_N^*)$. A CRR árazási formula szerint a K kötési árú európai call igazságos ára

$$C_N(K) = \mathbf{E}_N^* \frac{(S_{\tau_N}^N - K)_+}{B_{\tau_N}^N}. \tag{27}$$ {eq:crr-ar}

paraméter N-től függ

Most meghatározzuk ennek a határértékét. A centrális határeloszlás-tétel szerint

$\mathrm{Bin}(N, p_N^*)$

deMoivre-Laplace

$$\frac{Y_N - Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0,1), \ N \to \infty, \tag{28}$$ {eq:Y_N-conv}

ha $0 < \liminf_{N\to\infty} p_N^* \le \limsup_{N\to\infty} p_N^* < 1$, de majd megmutatjuk, hogy ez teljesül, sőt $\lim_{N\to\infty} p_N^* = 1/2$. A fenti formula bal oldalát kialakítva az $S_{\tau_N}^N$-ben,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+b_N}{1+a_N}\right)^{Y_N}(1+a_N)^N &= \exp\left\{Y_N \log\frac{1+b_N}{1+a_N} + N\log(1+a_N)\right\} \\ &= \exp\Bigg\{\underbrace{\frac{Y_N - Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}}}_{Z}\ \underbrace{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}\log\frac{1+b_N}{1+a_N}}_{\to c} \\ &\qquad + \underbrace{N\left(p_N^*\log\frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N)\right)}_{\to d}\Bigg\}.\end{aligned}$$

$Z \sim N(0,1)$

Látjuk, hogy (28) alapján a

$E f(\dots) \to E f(Zc+d)$

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}\log\frac{1+b_N}{1+a_N}, \text{ és } \lim_{N\to\infty} N\left(p_N^*\log\frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N)\right)$$

határértékeket kell meghatároznunk. A (26) formula és a Taylor-sorfejtés szerint

$(1+a_N) = e^{-\sigma\sqrt{h}}$

$\log\frac{1+b_N}{1+a_N} \approx 2\sigma\sqrt{h}$

$h = \frac{T}{N} \to 0$ $(N \to \infty)$

$$\begin{aligned}1+b_N = e^{\sigma\sqrt{h}}(1+r_N) &= \left(1+\sigma\sqrt{h}+\frac{\sigma^2}{2}h + O(h^{3/2})\right)(1+rh) \\ &= 1+\sigma\sqrt{h}+\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)h + O(h^{3/2}),\end{aligned}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$

így
$$b_N = \sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) h + O(h^{3/2}),$$
és ugyanígy
$$a_N = -\sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) h + O(h^{3/2}).$$
Innen kapjuk, hogy

rh

$$\begin{aligned} p_N^* = \frac{\overset{\shortparallel}{r_N} - a_N}{b_N - a_N} &= \frac{\sigma\sqrt{h} - \frac{\sigma^2}{2}h + O(h^{3/2})}{2\sigma\sqrt{h} + O(h^{3/2})} \\ &= \frac{1}{2 + O(h)} - \frac{\sigma\sqrt{h} + O(h)}{4 + O(h)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{h} + O(h). \end{aligned}$$

$h \to 0 \quad N \to \infty$

$\frac{1}{2+O(h)} = \frac{1}{2} + O(h) \quad (h \to 0)$

Rögtön látjuk, hogy $p_N^* \to 1/2$, tehát (28) valóban teljesül. A kapott aszimptotikákat visszaírva a kérdéses limeszekbe ($h = T/N$), és felhasználva a $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$, $x \to 0$, sorfejtést (az elsőrendű sorfejtés nem elég!), kapjuk hogy
$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N p_N^*(1-p_N^*)} \log\frac{1+b_N}{1+a_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt{p_N^*(1-p_N^*)} 2\sigma\sqrt{T} = \sigma\sqrt{T},$$
és
$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} N\left(p_N^* \log\frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} N\left(\left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\frac{T}{N}} + O(N^{-1})\right] 2\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + r\frac{T}{N} + O(N^{-3/2})\right) \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T. \end{aligned}$$
Mindezt visszaírva (27)-be
$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} C_N(K) &= e^{-rT}\mathbf{E}^*\left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} - K\right)_+ \\ &= \mathbf{E}^*\left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T} - e^{-rT}K\right)_+, \end{aligned}$$