We just proved this for $n = N - 1$. The same way as above we have

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{n-1}}{B_{n-1}} &= \frac{(S_{n-1} - K)_+}{B_{n-1}} \\
&= \left(\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{K}{B_{n-1}} \right)_+ \\
&\leq \mathbf{E_Q} \left[\left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{K}{B_{n-1}} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] && \text{Jensen's inequality} \\
&\leq \mathbf{E_Q} \left[\left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{K}{B_n} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] && \text{by } B_n \geq B_{n-1} \\
&= \mathbf{E_Q} \left[\frac{(S_n - K)_+}{B_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbf{E_Q} \left[\frac{f_n}{B_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&\leq \mathbf{E_Q} \left[\mathbf{E_Q}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] && \text{induction} \\
&\leq \mathbf{E_Q}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] && Z \text{ supermartingale}
\end{aligned}
$$

Thus $\tau^* \equiv N$ is an optimal stopping time, which means that no matter what happens, we wait until the end. Then the American option behaves as the European, so the prices are equal.

Theorem 13. *Assume that the market is arbitrage free and complete, and the interest rate is nonnegative. Then the price of a European call option equals to the price of the American call option.*

7 Stochastic integration

7.1. Az Itô-formula

Ezek után belátjuk az Itô-formulát.

14. Theorem (Itô-formula (1944))**.** *Legyen $X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ Itô-folyamat, és $f \in C^2$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2 \mathrm{d}s.$$

$$\sum_{i=0}^{N} f(t_{i-1}, \omega)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

$\int_0^t f(s)\, dW_s$ martingál

$E[f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = 0.$

adaptált

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^t f(s)\,dW_s\right) = \int_0^t f^2(s)\,ds$$

A következőkben bevezetjük a többdimenziós Itô-folyamatokat.

A $W = (W^1, W^2, \dots, W^r)$ egy *r-dimenziós Brown-mozgás*, ha a komponensei függetlenek, és minden komponens egy SBM. Az (X_t) egy *d-dimenziós Itô-folyamat*, ha az i-edik komponense

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^r \int_0^t H_s^{i,j} \mathrm{d}W_s^j, \qquad (14)$$ {eq:multid-ito}

ahol $\int_0^T |K_s^i| \mathrm{d}s < \infty, \int_0^T (H_s^{i,j})^2 \mathrm{d}s < \infty$ m.b., és $K^i, H^{i,j}$ $\mathcal{F}_t$-adaptált folyamatok, $i = 1, 2, \dots, d$, $j = 1, 2, \dots, r$.

15. Theorem (Többdimenziós Itô-formula)**.** *Legyen (X_t) egy többdimenziós Itô-folyamat, (14) formula szerint, és $f : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$. Ekkor*

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^d) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^d) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X_s^1, \dots, X_s^d)\, \mathrm{d}s \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s^1, \dots, X_s^d)\, \mathrm{d}X_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(s, X_s^1, \dots, X_s^d) \sum_{k=1}^r H_s^{i,k} H_s^{j,k}\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

$d=1$
$f(t,x) = e^{-rt}\cdot x$

7.2. Alkalmazások

$$f(t,X_t) - f(0,X_0) = \int_0^t -re^{-rs} X_s\, ds + \int_0^t e^{-rs}\, dX_s.$$

Az Itô-formulára nézünk néhány alkalmazást.

2. Example. Parciális integrálás I. Legyen (X, Y) kétdimenziós Itô-folyamat

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s\, \mathrm{d}s + \int_0^t H_s\, \mathrm{d}W_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t L_s\, \mathrm{d}s + \int_0^t G_s\, \mathrm{d}W_s, \end{aligned}$$

ahol K, L, H, G olyanok amilyennek lenniük kell. Ekkor

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s - \int_0^t H_s G_s \mathrm{d}s.$$

Vegyük észre, hogy a hagyományos parciális integrálási formulában (amikor tehát X, Y *determinisztikus, korlátos változású* függvények) nem szerepel az utolsó tag.

A bizonyításhoz alkalmazzuk az Itô-formulát az (X, Y) folyamatra, és az $f(x, y) = xy$ függvényre. Ekkor a (14) formula szerinti szereposztás:

$$r = 1,\ d = 2,\ K_s^1 = K_s,\ K_s^2 = L_s,\ H_s^{1,1} = H_s,\ H_s^{2,1} = G_s.$$

Mivel $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$, és $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$, így

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2} 2 \int_0^t H_s G_s \mathrm{d}s,$$

ami rendezés után éppen az állítás.

3. Example. Parciális integrálás II. Egy kicsit módosítjuk az előző példát. Legyen $\widetilde{W}$ egy W-től független SBM, és (X, Y) kétdimenziós Itô-folyamat

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t L_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t G_s \,\mathrm{d}\widetilde{W}_s, \end{aligned}$$

ahol K, L, H, G olyanok amilyennek lenniük kell. Ekkor

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s.$$

Ennek bizonyítása ugyanúgy megy, mint az előbb. Vegyük észre, hogy itt $d = r = 2$, és a két folyamatot különböző Wiener-folyamat hajtja meg, ezért nem jelenik meg az extra tag.

4. Example. Korábban már meghatároztuk az $\int W_s \mathrm{d}W_s$ sztochasztikus integrál értékét. Most meghatározzuk az Itô-formula segítségével.

A Wiener-folyamat Itô-folyamatként való reprezentációja $K_s \equiv 0$, $H_s \equiv 1$. Legyen $f(x) = x^2$. Az Itô-formula szerint

$$W_t^2 = W_0^2 + \int_0^t 2W_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2\mathrm{d}s.$$

Ezt átrendezve kapjuk a már ismert

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

formulát. Innen azt is rögtön látjuk, hogy $W_t^2 - t$ martingál, hiszen minden sztochasztikus integrál martingál (na nem mintha a direkt bizonyítás bonyolult lett volna).

14. Exercise. Az Itô-formula alkalmazásával igazoljuk, hogy $Y(t) = e^{t/2} \cos W_t$ martingál!

15. Exercise. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^t W_s^2 \mathrm{d}W_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s \mathrm{d}s,$$

és

$$\int_0^t W_s^3 \mathrm{d}W_s = \frac{1}{4} W_t^4 - \frac{3}{2} \int_0^t W_s^2 \mathrm{d}s.$$

16. Exercise. Legyen $\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^r)$ r-dimenziós SBM, $r \geq 2$, és legyen R a $\mathbf{W}$ hossza, azaz

$$R_t = \sqrt{\sum_{i=1}^r (W^i)^2}.$$

Igazoljuk, hogy R_t teljesíti a

$$\mathrm{d}R_t = \frac{r-1}{2R_t} \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^r \frac{W_t^i}{R_t} \mathrm{d}W_t^i$$

differenciálegyenletet! Ez a *sztochasztikus Bessel-egyenlet*, és R_t a *Bessel-folyamat*.

8. Folytonos idejű piacok

A sztochasztikus integrálelmélettel felvértezve rátérünk a folytonos idejű piaci modellek tárgyalására.

8.1. Piacok általában

Az alapfogalmak a diszkrét időben már megismert fogalmak természetes folytonos idejű megfelelői.

A továbbiakban a $[0, T]$ *véges* időhorizonton dolgozunk, $T < \infty$. Adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, azon egy $(\mathcal{F}_t)$ filtráció. A piacon két termék adott, egy kockázatmentes és egy kockázatos. A kötvény a kockázatmentes, az árfolyamata (B_t) egy determinisztikus folyamat, a részvény a kockázatos, árfolyamata (S_t) egy pozitív véletlen sztochasztikus folyamat, ami adaptált az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációhoz. Továbbá azt is feltesszük, hogy (S_t) az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációhoz adaptált Itô-folyamat.

A *stratégia / portfólió* egy $(\pi_t = (\beta_t, \gamma_t))$ folyamat, ami adaptált (hát persze, hiszen nem látunk a jövőbe), és

$$\int_0^T |\beta_t| \mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t < \infty, \text{ m.b.}$$

A (β_t) folyamat jelenti a t-ben birtokunkban levő kötvény, (γ_t) pedig a részvény mennyiségét. Természetesen mindkét folyamat lehet negatív is.

A (π) portfólió értéke t-ben

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{15}$$ {eq:ertekfoly}

ez a portfólió *értékfolyamata*.

Az önfinanszírozó stratégiát szeretnénk definiálni a diszkrét idő analogonjaként. Az, hogy nem fektetek be plusz pénzt a portfóliómba, és nem is veszek ki belőle, azt jelenti, hogy amikor az n-edik napon este átrendezem a portfóliómat, akkor az összérték meg kell egyezzen az n-edik napon a portfólióm értékével, azaz

$$\beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, = X_n^\pi$$

és a $\beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$ változók $\mathcal{F}_n$-mérhetőek. Felírva, hogy $X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1}$, azt kapom, hogy a portfólióm értékének megváltozása

$$X_{n+1}^\pi - X_n^\pi = \beta_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + \gamma_{n+1}(S_{n+1} - S_n).$$

Ez azt jelenti, hogy az értékfolyamat megváltozása a kötvényár és a részvényár megváltozásából tevődik össze, külső forrást nem veszünk igénybe. Ennek az egyenletnek a folytonos megfelelője a

$$\mathrm{d}X_t^\pi = \beta_t \mathrm{d}B_t + \gamma_t \mathrm{d}S_t$$

$$X_t^\pi - X_0^\pi = \int_0^t \beta_t \, dB_t + \int_0^t \gamma_t \, dS_t .$$

sztochasztikus differenciálegyenlet. Ez lesz az önfinanszírozóság definíciója.

Azt mondjuk, hogy a ($\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$) stratégia *önfinanszírozó*, ha teljesül a

$$\mathrm{d}X_t^\pi = \beta_t \mathrm{d}B_t + \gamma_t \mathrm{d}S_t \tag{16}$$ {eq:onfin}

sztochasztikus differenciálegyenlet.

Az ($\overline{S}_t = S_t B_0/B_t$) folyamat a *diszkontált részvényárfolyamat*, az ($\overline{X}_t^\pi = X_t^\pi B_0/B_t$) folyamat pedig a *diszkontált értékfolyamat.*

Mostantól feltesszük, hogy a folytonos kamatráta $r > 0$, azaz

$$B_t = e^{rt}, \; t \geq 0.$$

Ekkor

$$\overline{S}_t = e^{-rt} S_t, \text{ és } \overline{X}_t^\pi = e^{-rt} X_t^\pi.$$

{all:onfin-ekv}

7. Proposition. *A ($\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$) stratégia pontosan akkor önfinanszírozó, ha*

$$\overline{X}_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}\overline{S}_s, \quad t \in [0, T].$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy π önfinanszírozó. Az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi &= \mathrm{d}\left(e^{-rt} X_t^\pi\right) = -re^{-rt} X_t^\pi \mathrm{d}t + e^{-rt} \mathrm{d}X_t^{\pi} \\
&= -re^{-rt}(\beta_t e^{rt} + \gamma_t S_t)\mathrm{d}t + e^{-rt}\left(\beta_t \mathrm{d}e^{rt} + \gamma_t \mathrm{d}S_t\right) \\
&= -re^{-rt}\gamma_t S_t \mathrm{d}t + e^{-rt}\gamma_t \mathrm{d}S_t \\
&= \gamma_t \mathrm{d}\left(e^{-rt} S_t\right),
\end{aligned}$$

amint állítottuk.

Megfordítva, tegyük fel, hogy

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = \gamma_t \mathrm{d}\overline{S}_t.$$

Mivel $X_t^\pi = \beta_t e^{rt} + \gamma_t S_t$, így a bal oldal

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = -re^{-rt} X_t^\pi \mathrm{d}t + e^{-rt} \mathrm{d}X_t^\pi = -e^{-rt}\beta_t \mathrm{d}B_t \overset{e^{rt}}{\underset{}{}} \underbrace{- re^{-rt}\gamma_t S_t \mathrm{d}t} + e^{-rt} \mathrm{d}X_t^\pi.$$

A jobb oldal

$$\gamma_t \mathrm{d}\overline{S}_t = \underbrace{-re^{-rt}\gamma_t S_t \mathrm{d}t} + \gamma_t e^{-rt} \mathrm{d}S_t.$$

$\int \Rightarrow e^{-rt} dX_t^\pi = e^{-rt} \beta_t dB_t + e^{-rt} \gamma_t dS_t.$

A két oldal egyenlőségéből adódik, hogy

$$\mathrm{d}X_t^\pi = \beta_t \mathrm{d}B_t + \gamma_t \mathrm{d}S_t,$$

ami éppen az önfinanszírozóság definíciója. □

Bevezetjük az arbitrázs fogalmát. A π önfinanszírozó stratégia *arbitrázsstratégia*, ha $X_0^\pi = 0$ m.b., $X_T \geq 0$ m.b., és $\mathbf{P}\{X_T^\pi > 0\} > 0$. A piac *arbitrázsmentes*, ha nincs arbitrázsstratégia.

Ez a fogalom fejezi ki azt, hogy 0 kezdőtőkével indulva, biztosan nyerünk, azaz *ingyen ebédhez* jutunk. Természetes feltenni, hogy a valóságban arbitrázs nem létezik a piacon, hiszen ha létezne, akkor mindenki ezt a stratégiát játszaná meg, ezzel módosítva az árakat, és így nagyon gyorsan megszűnne az arbitrázslehetőség. Diszkrét idejű piacon láttuk, hogy (bizonyos feltételek mellett) az arbitrázsmentesség ekvivalens azzal, hogy létezik piacon olyan, az eredeti $\mathbf{P}$ mértékkel ekvivalens mérték, melyre nézve a diszkontált részvényárfolyamat martingál. Ez bizonyos feltételek mellett a folytonos esetben is igaz, ráadásul az egyik irányú implikáció most is nagyon egyszerű.

Tegyük fel, hogy van a piacon egy olyan $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, melyre $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ (azaz a két mérték ekvivalens, azaz $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$), és az $(\overline{S}_t)$ folyamat martingál. Az ilyen mértéket *ekvivalens martingálmértéknek* (EMM) nevezzük. Legyen π egy tetszőleges önfinanszírozó stratégia. A 7 Állítás szerint ekkor az értékfolyamat

$$\overline{X}_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}\overline{S}_s.$$

$\overline{S}_t = \int_0^t H_s dW_s$

Mivel $(\overline{S}_t)$ $\mathbf{Q}$-martingál, és $\overline{X}_t^\pi$ e szerinti sztochasztikus integrál, ezért az $(\overline{X}_t^\pi)$ folyamat is $\mathbf{Q}$-martingál. (Vegyük észre, hogy ugyanezt az állítást beláttuk a diszkrét piacok esetén is.) Eszerint

$\overline{X}_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_s H_s dW_s$

$$\mathbf{E_Q}\overline{X}_T^\pi = \mathbf{E_Q}X_0^\pi.$$

Mivel $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$, ezért ha $X_0^\pi = 0$, $X_T^\pi \geq 0$ $\mathbf{P}$-m.b., akkor $\mathbf{Q}$-m.b. is. Na de $\mathbf{E_Q}\overline{X}_T^\pi = \mathbf{E_Q}X_0^\pi = 0$, amiből következik, hogy $X_T^\pi \equiv 0$ $\mathbf{Q}$-m.b., de így $\mathbf{P}$-m.b. is.

Ezzel beláttuk az alábbit.

16. Theorem. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, (S_t), (B_t = e^{rt}), (\mathcal{F}_t))$ folytonos idejű piacon létezik $\mathbf{Q}$ EMM, akkor a piac arbitrázsmentes.*

Természetesen folytonos idejű piacon is tekinthetünk opciókat, ill. tetszőleges követeléseket. Az egyik célunk az ilyen követelések igazságos árának definiálása, meghatározása, ill. fedezeti portfólió összeállítása. Igazságos árat és fedezeti stratégiát csak speciális esetben adunk meg a következő fejezetben, azonban a definíciót kimondjuk és néhány tulajdonságot bebizonyítunk az általános esetben.

Az f_T egy *véletlen követelés*, ha $\mathcal{F}_T$-mérhető. A π egy *fedezeti stratégia* f_T-re x kezdőtőkével, röviden (f_T, x)-fedezet, ha

$$X_T^\pi \geq f_T \text{ m.b., és } X_0^\pi = x.$$

Az f_T követelés *igazságos ára* a legkisebb olyan x érték, melyre létezik (f_T, x)-fedezet, azaz

$$C_T(f_T) = \inf\{x \geq 0 : \text{ létezik } (f_T, x)\text{-fedezet}\}.$$

Tegyük fel, hogy a piacon létezik EMM, legyen $\mathbf{Q}$ egy ilyen. Ekkor tetszőleges π (f_T, x)-fedezetre

$$x = \mathbf{E_Q} X_0^\pi = \mathbf{E_Q} \overline{X}_t^\pi = \mathbf{E_Q} e^{-rT} X_T^\pi \geq \mathbf{E_Q} e^{-rT} f_T.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$C(T, f_T) \geq \mathbf{E_Q}(e^{-rT} f_T). \tag{17}$$ {eq:ia-ineq}

9. Mértékváltás

A diszkrét idejű piacok elméletében láttuk mennyire fontos az ekvivalens martingálmérték, ugyanis ez alapján tudtunk árazni. Jelen fejezet célja, hogy megértsük hogy változik egyes folyamatok dinamikája ha megváltoztatjuk a mértéket, vagy másképpen, hogyan vezessünk be olyan mértéket, ami szerint a folyamatunk martingál lesz.

9.1. A Wiener-folyamat karakterizációja

17. Theorem (Lévy tétele a Wiener-folyamat karakterizációjáról)**.** *Legyen M_t folytonos martingál, melyre $M_0 = 0$. Ha $M_t^2 - t$ martingál, akkor M_t Wiener-folyamat.*

Bizonyítás. Meghatározzuk az M_t feltételes karakterisztikus függvényét $\mathcal{F}_s$-re, $t > s$. Ehhez írjuk föl az Itô-formulát az $f(x) = e^{iux}$ függvényre, ahol $u \in \mathbb{R}$ tetszőleges, rögzített. Mivel $f'(x) = iue^{iux}$, $f''(x) = -u^2 e^{iux}$, és a feltétel szerint $\langle M \rangle_t = t$, így

$$e^{iuM_t} - e^{iuM_s} = \int_s^t iue^{iuM_v} \mathrm{d}M_v + \frac{1}{2} \int_s^t (-u^2) e^{iuM_v} \mathrm{d}v.$$

Legyen $A \in \mathcal{F}_s$ tetszőleges. A fenti formulában átszorozva $e^{-\mathrm{i}uM_s}$-el, és integrálva az A eseményen kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}\left[e^{\mathrm{i}u(M_t-M_s)}I_A\right] = \mathbf{P}\{A\} - \frac{u^2}{2}\int_s^t \mathbf{E}\left[e^{\mathrm{i}u(M_v-M_s)}I_A\right]\mathrm{d}v.$$

Rögzített A és s esetén vezessük be a

$$g_{A,s}(t) = g(t) = \mathbf{E}\left[e^{\mathrm{i}u(M_t-M_s)}I_A\right]$$

jelölést. Így

$$g(t) = \mathbf{P}\{A\} - \frac{u^2}{2}\int_s^t g(v)\mathrm{d}v,$$

amit deriválva

$$g'(t) = -\frac{u^2}{2}g(t), \quad g(s) = \mathbf{P}\{A\}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása

$$g(t) = \mathbf{P}\{A\} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

Mivel ez minden $A \in \mathcal{F}_s$ eseményre teljesül, azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{E}\left[e^{\mathrm{i}u(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

minden $u \in \mathbb{R}$ esetén. Vagyis az $M_t - M_s$ növekmény független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától, és éppen egy $(t-s)$ szórásnégyzetű normális eloszlás. Mivel folytonos is, így M_t SBM. □

Megjegyezzük, hogy a folytonossági feltétel nélkül nem igaz az állítás. Hiszen ha N_t 1 intenzitású Poisson-folyamat, akkor $N_t - t$ és $(N_t - t)^2 - t$ is martingál.

9.2. Girsanov-tétel

Az új mérték bevezetése diszkrét modell esetén nem jelentett nehézséget. Folytonos modelleknél a dolog nem ilyen egyszerű.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $(\mathcal{F}_t)$ egy filtráció, és $\mathbf{Q}$ egy másik valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{A})$-n, ami abszolút folytonos $\mathbf{P}$-re, jelben $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$. Legyen M_∞ a $\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym-deriváltja,

$$M_\infty = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Mivel a továbbiakban általában több mértékkel dolgozunk, ezért a várható érték alsó indexében jelöljük, hogy melyik szerint vesszük a várható értéket; azaz $\mathbf{E_P} X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbf{P}$ és $\mathbf{E_Q} X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbf{Q}$. Továbbá a $\mathbf{P}$ mérték szerinti martingálokat röviden $\mathbf{P}$-martingálnak, a $\mathbf{Q}$ mérték szerintieket $\mathbf{Q}$-martingálnak nevezzük.

Definiáljuk az

$$M_t = \mathbf{E_P}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$$

$\mathbf{P}$-martingált. A következő lemma megadja a $\mathbf{P}$- és $\mathbf{Q}$-martingálok közti kapcsolatot a Radon–Nikodym-derivált segítségével.

{lemma:p-q-mtg}

9. Lemma. *Az (X_t) $\mathcal{F}_t$-adaptált sztochasztikus folyamat pontosan akkor* $\mathbf{Q}$-*martingál, ha az $(M_t X_t)$ folyamat* $\mathbf{P}$-*martingál.*

Bizonyítás. Mivel

$$\mathbf{E_P}[M_\infty X_t | \mathcal{F}_t] = X_t M_t,$$

így minden $A \in \mathcal{F}_t$ eseményre

$$\int_A X_t M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X_t M_t \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Ezért, ha $A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, akkor

$$\int_A X_t \mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_A X_t M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X_t M_t \mathrm{d}\mathbf{P}$$
$$\int_A X_s \mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_A X_s M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X_s M_s \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Az (X_t) folyamat pontosan akkor $\mathbf{Q}$-martingál, ha a bal oldalak egyenlőek minden $A \in \mathcal{F}_s$ halmazra, és $s < t$ esetén, ami persze pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalak egyenlőek, ami azt jelenti, hogy $(M_t X_t)$ $\mathbf{P}$-martingál. □

Legyen

$$\zeta_t^s = \int_s^t X_u \mathrm{d}W_u - \frac{1}{2} \int_s^t X_u^2 \mathrm{d}u, \quad \zeta_t = \zeta_t^0,$$

ahol X_t adaptált folyamat. Ekkor $Z_t = e^{\zeta_t}$ kielégíti a

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s \mathrm{d}W_s$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. (Ezt a formulát használni fogjuk a Girsanov-tétel bizonyításánál.)

A fenti sztochasztikus differenciálegyenletet differenciálegyenletes jelöléssel

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t X_t \mathrm{d}W_t, \quad Z_0 = 1,$$

alakba írható.

A ζ folyamatot Itô-folyamatként felírva

$$\zeta_t = \int_0^t \overbrace{-\frac{1}{2}X_u^2}^{K_n}\mathrm{d}u + \int_0^t \overbrace{X_u}^{H_n}\mathrm{d}W_u.$$

Legyen $f(x) = e^x$, ekkor az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}
Z_t = e^{\zeta_t} &= \overset{e^{\zeta_0}}{1} + \int_0^t e^{\zeta_s}\mathrm{d}\zeta_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{\zeta_s}X_s^2\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t e^{\zeta_s}\left(-\frac{1}{2}X_s^2\mathrm{d}s + X_s\mathrm{d}W_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{\zeta_s}X_s^2\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t e^{\zeta_s}X_s\mathrm{d}W_s \\
&= 1 + \int_0^t Z_s X_s \mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

amint állítottuk. Azt is rögtön látjuk, hogy Z_t martingál.

17. Exercise. Legyen ζ_t mint fent. Mutassuk meg, hogy a $Y_t = e^{-\zeta_t}$ folyamat kielégíti a

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t X_t^2 \mathrm{d}t - X_t Y_t \mathrm{d}W_t, \quad Y_0 = 1,$$

sztochasztikus differenciálegyenletet!

18. Theorem (Girsanov-tétel)**.** *Legyen (θ_t) adaptált folyamat, melyre $\int_0^T \theta_s^2\mathrm{d}s < \infty$ m.b., és tegyük föl, hogy*

$$\Lambda_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\mathrm{d}s\right\} \tag{18}$$

{eq:Lambda}

***P**-martingál, ahol (W_t) SBM a **P** mérték szerint. Definiáljuk a $\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{Q}$ mértéket a*

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}_\theta}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \Lambda_T$$

*formulával. Ekkor a $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s\mathrm{d}s$ SBM a **Q**-mérték szerint.*

1. *Remark.* Tanultuk, hogy a Λ_t folyamat martingál. Akkor meg miért tesszük föl a Girsanov-tételben, hogy martingál? A helyzet az, hogy a martingálsághoz kell integrálhatóság, ami nem feltétlenül igaz, ha a θ_t folyamat nagy lehet. Ha bizonyos momentumfeltétel teljesül, akkor már Λ_t tényleg martingál. Lényegében a „tegyük föl, hogy" helyett gondolhatunk „legyen"-t is.

Bizonyítás. Először azt kell belátni, hogy $\mathbf{Q}$ tényleg valószínűségi mérték. Láttuk, hogy

$$\Lambda_t = 1 - \int_0^t \Lambda_s \theta_s \mathrm{d}W_s,$$

ami martingál, így

$$\mathbf{E}_\mathbf{P} \Lambda_T = \mathbf{E}_\mathbf{P} \Lambda_0 = 1,$$

és mivel $\Lambda_T > 0$ ezért $\mathbf{Q}$ tényleg valószínűségi mérték.

Most megmutatjuk, hogy a $\tilde{W}$ folyamat teljesíti a Lévy-féle karakterizációs tétel feltételeit a $\mathbf{Q}$ mérték szerint.

A folytonosság nyilvánvaló, hiszen W folytonos, és $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$. Mivel Λ_t martingál, ezért a 9 Lemma szerint $(\tilde{W}_t)$ pontosan akkor $\mathbf{Q}$-martingál, ha $(\tilde{W}_t \Lambda_t)$ $\mathbf{P}$-martingál. Írjuk fel az Itô-formulát az $f(x, y) = xy$ függvényre a

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_t &= \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s + \int_0^t 1 \mathrm{d}W_s \quad = W_t \\
\Lambda_t &= 1 - \int_0^t \Lambda_s \theta_s \mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

kétdimenziós Itô-folyamattal. Eszerint

$$\begin{aligned}
\Lambda_t \tilde{W}_t - \Lambda_0 \tilde{W}_0 &= \int_0^t \tilde{W}_s \mathrm{d}\Lambda_s + \int_0^t \Lambda_s \mathrm{d}\tilde{W}_s + \int_0^t -\Lambda_s \theta_s \mathrm{d}s \\
&= -\int_0^t \tilde{W}_s \Lambda_s \theta_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \Lambda_s \left(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s\right) - \int_0^t \Lambda_s \theta_s \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Lambda_s (1 - \theta_s \tilde{W}_s) \mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

ami $\mathbf{P}$-martingál. Tehát $(\tilde{W}_t)$ valóban $\mathbf{Q}$-martingál.

Ahhoz, hogy a $(\tilde{W}_t^2 - t)$ folyamat **Q**-martingál, megint azt mutatjuk meg, hogy $(\tilde{W}_t^2 - t)\Lambda_t$ **P**-martingál. Először felírjuk $(\tilde{W}_t^2 - t)$ Itô-folyamatos reprezentációját. Az Itô-formulát az x^2 függvényre felírva

$$\tilde{W}_t^2 = 2\int_0^t \tilde{W}_s \mathrm{d}\tilde{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\mathrm{d}t,$$

amit rendezve, és beírva $\tilde{W}_t$ előállítását

$$\tilde{W}_t^2 - t = 2\int_0^t \tilde{W}_s \left(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s\right).$$

A kétváltozós Itô-formulát felírva, mint az előbb

$$\begin{aligned}\Lambda_t(\tilde{W}_t^2 - t) &= \int_0^t \Lambda_s 2\tilde{W}_s\left(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t (\tilde{W}_s^2 - s)\mathrm{d}\Lambda_s - \int_0^t \Lambda_s\theta_s 2\tilde{W}_s \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left[2\Lambda_s\tilde{W}_s - (\tilde{W}_s^2 - s)\Lambda_s\theta_s\right]\mathrm{d}W_s\end{aligned}$$

adódik, ami **P**-martingál. Tehát $(\tilde{W}_t^2 - t)$ **Q**-martingál, és ezzel az állítást beláttuk. □

Végül, bizonyítás (és precíz állítás) nélkül megemlítjük, hogy minden folytonos martingál előállítható, mint egy megfelelő adaptált folyamat Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálja. Vagyis minden szemimartingál Itô-folyamat.

19. Theorem (Martingál reprezentációs tétel)**.** *Legyen* (W_t) *SBM az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mezőn, és legyen* $(\mathcal{F}_t)$ *a hozzá tartozó filtráció, azaz a* (W_t) *által generált filtráció, amihez hozzávesszük a* **P***-null halmazokat. Ha* (M_t) *folytonos, négyzetintegrálható martingál,* $M_0 = 0$ *m.b., akkor létezik olyan* (Y_t) *adaptált folyamat, melyre*

$$M_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s.$$

9.3. Black–Scholes modell

Ebben a részben egy speciális folytonos modellben kiszámítjuk a követelések igazságos árát, és megadunk egy tökéletes replikáló portfóliót. Speciális