Theorem 8 (Discrete Girsanov's theorem)**.** *Let $(\mu_n, \sigma_n)_n$ be a predictable sequence and assume that the stock prices are given by*

$$S_n = e^{\sum_{k=1}^{n}(\mu_k + \sigma_k Z_k)},$$

where $(Z_n)_n$ is a adapted sequence of $N(0,1)$ random variables, Z_n is independent of $\mathcal{F}_{n-1}$. Further, let $B_n \equiv 1$. Then, under the new measure

$$\mathrm{d}\mathbf{Q} = Z_N \mathrm{d}\mathbf{P}$$

(S_n) is a martingale.

5 Pricing and hedging European options

In this section we summarize our findings on pricing and hedging, and consider some special cases in detail.

5.1 Complete markets

Consider an arbitrage-free complete market. The *fair price* of the contingent claim f_N is

$$C(f_N) = \inf\{x : \exists \pi, X_0^\pi = x,\, X_N^\pi = f_N\}.$$

π önfin.

$\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_n$ Q-mtg.

$\Downarrow$

$\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)_n$ Q-mtg.

Then, by Theorems 3 and 7 there exists a unique EMM $\mathbf{Q}$. Since (X_n^π / B_n) is $\mathbf{Q}$-martingale

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q} \frac{f_N}{B_N} = \mathbf{E}_\mathbf{Q} \frac{X_N^\pi}{B_N} = \mathbf{E}_\mathbf{Q} \frac{\overset{X_0^\pi}{x}}{B_0} = \frac{x}{B_0},$$

therefore

$$C(f_N) = x = \frac{B_0}{B_N} \mathbf{E}_\mathbf{Q} f_N.$$

Note that x is independent of the hedge π itself, that is for different hedges the initial value is the same.

For a hedge we need to know not only the fair price C, but also the strategy π itself. For the given claim f_N consider the martingale

$$M_n = \mathbf{E}_\mathbf{Q} \left[\frac{f_N}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right].$$

f_N nem feltétlenül S_N függvénye

egzotikus opció: ázsiai: $f_N = \frac{S_1 + \ldots + S_N}{N}$

lookback opció (visszatekintő): $f_N = \min_{1 \le i \le N} S_i$

$$\Delta \frac{S_k}{B_k} = \frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}}$$

By Theorem 7 there exists a representation

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta \frac{S_k}{B_k},$$

with a predictable sequence (γ_n). Let

$$\beta_n = M_n - \frac{\gamma_n S_n}{B_n}.$$

We proved that $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_n$ is an SF strategy and is a perfect hedge for f_N.

Summarizing, we obtained the following.

Theorem 9. *In an arbitrary arbitrage-free complete market the price of the contingent claim f_N is*

$$C(f_N) = B_0 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \frac{f_N}{B_N}.$$

Moreover, there exists a strategy π which is a perfect hedge of f_N, i.e.

$$X_N^\pi = f_N,$$

where (β_n, γ_n) are given above. The value process is determined by

$$X_n^\pi = B_n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{f_N}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right].$$

5.2 Homogeneous binomial market – CRR formula

Consider a homogeneous binomial N-step market with $a < r < b$. That is

$$B_n = (1+r)^n, \quad S_n = S_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + \rho_k),$$

where $\rho_k \in \{a, b\}$. We proved that this market is arbitrage-free and complete, and the unique EMM is given by

$$\mathbf{Q}(\rho_i = a) = \frac{b-r}{b-a},$$

and ρ_i's are independent. If the claim f_N only depends on the final price S_N, and not on the whole trajectory, i.e.

$$f_N(\omega) = f_N(S_N(\omega)),$$

then the pricing formula simplifies, and we obtain the Cox–Ross-Rubinstein formula:

$$C(f_N) = \underbrace{\frac{1}{(1+r)^N}}_{= \frac{B_0}{B_N}} \sum_{k=0}^{N} f_N(S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}) \binom{N}{k} q^k(1-q)^{N-k},$$

where $q = \frac{r-a}{b-a}$.

5.3. A CRR-formulától a Black–Scholes-formuláig

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a Black–Scholes árazási formulát megkaphatjuk úgy, mint a homogén binomiális piacon a Cox–Ross–Rubinstein árazási formula határértékét. Ez a rész a [2] jegyzet 2.6 fejezetén alapul.

A folytonos modellt a $[0,T]$ intervallumon tekintjük. A folytonosan számított kamatláb $r > 0$, és $\sigma > 0$ rögzített paraméter, a volatilitás. A diszkrét modellben legyen

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T, \quad \tau_i = \frac{i}{N}T.$$

Ezek a lehetséges kereskedési időpontok az N-lépéses binomiális modellben. Vezessük be a $T/N = h$ jelölést. Majd az $N \to \infty$ határátmenetet vizsgáljuk. Jelölje $B_{\tau_n}^N, S_{\tau_n}^N$ a kötvény, ill. a részvény árát a τ_n időpontban az N-edik piacon. Az N-lépéses diszkrét idejű homogén binomiális piac paraméterei legyenek r_N, a_N, és b_N.

Most megválasztjuk az r_N, a_N, b_N paramétereket. Legyen $B_0 = 1$. Folytonos időben a kötvényár t-ben $B_t = e^{rt}$. Diszkrét időben a t-hez tartozó osztópont $\tau_{\lfloor tN/T \rfloor}$, ahol $\lfloor x \rfloor$ az x egészrészét jelöli, ezt a későbbiekben elhagyjuk. Tehát

$$e^{rt} = B_t \approx B_{\tau_{\frac{tN}{T}}}^N = (1+r_N)^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor}.$$

Ha $r_N = rT/N = rh$, akkor a jobb oldal $N \to \infty$ esetén konvergál a bal oldalhoz. Legyen

$$r_N = r\frac{T}{N} = rh. \qquad (12)$$ {eq:r-valaszt}

(A későbbiekben említés nélkül többször felhasználjuk, hogy $h = T/N$.) Hasonló okoskodással megmutatható, hogy ahhoz, hogy $\mathbf{Var} S_{\tau_N}^N$ határértéke $N \to \infty$ esetén létezzen, nagyjából az kell, hogy

$$\log \frac{1+b_N}{1+r_N} = \sigma\sqrt{h}, \quad \log \frac{1+a_N}{1+r_N} = -\sigma\sqrt{h} \tag{13}$$ {eq:ab-valaszt}

teljesüljön. Az N-edik modellben így választjuk a paramétereket. Belátjuk, hogy ilyen választás mellett a K kötési árú európai call opció binomiális modell alapján számolt igazságos ára $N \to \infty$ esetén a Black–Scholes-árhoz konvergál.

A binomiális modellben meghatároztuk az egyértelmű ekvivalens martingálmértéket. Ez az volt, mely szerint a részvényár

$$p_N^* = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N}$$

valószínűséggel $(1+b_N)$-szeresére nő, $1-p_N^*$ valószínűséggel $(1+a_N)$-szeresére, és az N-lépés során ezek egymástól függetlenül történnek. Vagyis a részvényár eloszlása a $\mathbf{P}_N^*$ EMM szerint

$$S_{\tau_N}^N = S_0(1+b_N)^{Y_N}(1+a_N)^{N-Y_N} = S_0 \left(\frac{1+b_N}{1+a_N}\right)^{Y_N} (1+a_N)^N,$$

ahol $Y_N \sim \mathrm{Binom}(N, p_N^*)$. A CRR árazási formula szerint a K kötési árú európai call igazságos ára

$$C_N(K) = \mathbf{E}_N^* \frac{(S_{\tau_N}^N - K)_+}{B_{\tau_N}^N}. \tag{14}$$ {eq:crr-ar}

Most meghatározzuk ennek a határértékét. A centrális határeloszlás-tétel szerint

$$\frac{Y_N - Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0,1), \; N \to \infty, \tag{15}$$ {eq:Y_N-conv}

ha $0 < \liminf_{N\to\infty} p_N^* \le \limsup_{N\to\infty} p_N^* < 1$, de majd megmutatjuk, hogy ez teljesül, sőt $\lim_{N\to\infty} p_N^* = 1/2$. A fenti formula bal oldalát kialakítva az

$S^N_{\tau_N}$-ben,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+b_N}{1+a_N}\right)^{Y_N}(1+a_N)^N &= \exp\left\{Y_N \log\frac{1+b_N}{1+a_N} + N\log(1+a_N)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{Y_N - Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}}\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}\log\frac{1+b_N}{1+a_N}\right. \\
&\qquad \left. + N\left(p_N^*\log\frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy (15) alapján a

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}\log\frac{1+b_N}{1+a_N}, \text{ és } \lim_{N\to\infty} N\left(p_N^*\log\frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N)\right)$$

határértékeket kell meghatároznunk. A (13) formula és a Taylor-sorfejtés szerint

$$\begin{aligned}
1+b_N = e^{\sigma\sqrt{h}}(1+r_N) &= \left(1+\sigma\sqrt{h}+\frac{\sigma^2}{2}h + O(h^{3/2})\right)(1+rh) \\
&= 1+\sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)h + O(h^{3/2}),
\end{aligned}$$

így

$$b_N = \sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)h + O(h^{3/2}),$$

és ugyanígy

$$a_N = -\sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)h + O(h^{3/2}).$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p_N^* = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N} &= \frac{\sigma\sqrt{h} - \frac{\sigma^2}{2}h + O(h^{3/2})}{2\sigma\sqrt{h} + O(h^{3/2})} \\
&= \frac{1}{2+O(h)} - \frac{\sigma\sqrt{h}+O(h)}{4+O(h)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{h} + O(h).
\end{aligned}$$

Rögtön látjuk, hogy $p_N^* \to 1/2$, tehát (15) valóban teljesül. A kapott aszimptotikákat visszaírva a kérdéses limeszekbe ($h = T/N$), és felhasználva a

$\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$, $x \to 0$, sorfejtést (az elsőrendű sorfejtés nem elég!), kapjuk hogy

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)} \log \frac{1+b_N}{1+a_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt{p_N^*(1-p_N^*)} 2\sigma\sqrt{T} = \sigma\sqrt{T},$$

és

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} N \left(p_N^* \log \frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} N \left(\left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\frac{T}{N}} + O(N^{-1}) \right] 2\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + r\frac{T}{N} + O(N^{-3/2}) \right) \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T.
\end{aligned}$$

Mindezt visszaírva (14)-be

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} C_N(K) &= e^{-rT}\mathbf{E}^* \left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} - K \right)_+ \\
&= \mathbf{E}^* \left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T} - e^{-rT}K \right)_+,
\end{aligned}$$

ami éppen a Black–Scholes-formulában kapott ár. Ezzel beláttuk, amit akartunk.

Itt persze a határátmenet jogosságáról hallgattunk. Valójában van egy eloszlásbeli konvergenciánk, mert (15)-ból következik a részvényár eloszlásbeli konvergenciája. Innen a momentumkonvergencia tétel alapján akkor következik a várható értékek konvergenciája, ha megmutatjuk az egyenletes integrálhatóságot. Mint már sokszor, ezt nem bizonyítjuk.

Azt is fontos megemlíteni, hogy nemcsak a részvényár lejáratkori eloszlása konvergál a Black–Scholes-modellben szereplő lejáratkori eloszláshoz, hanem az egész folyamat is (tehát mint a $[0,T]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény) eloszlásban konvergál az exponenciális Brown-mozgáshoz. Ennek igazolása azonban már kifinomultabb technikát igényel.

5.4 Incomplete markets

We assume that the market is arbitrage-free, but there are various EMM's. Let $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ be the set of EMM's.

In incomplete markets there are contingent claims which are not replicable, that is, there is no perfect hedge. The upper price of a claim f_N is

$$C^*(f_N) = \inf\{x : \pi,\ X_0^\pi = x,\ X_N^\pi \geq f_N\}.$$

We proved the following result in a one-step market. Without a proof we state the general version.

Theorem 10. *The upper price of the claim f_N in an arbitrage-free incomplete market is given by*

$$C^*(f_N) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathbf{P})} B_0 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \frac{f_N}{B_N}.$$

6 American options

While European options can be exercised only at the terminal date N, American options can be exercised at any time. Formally, instead of a fixed random payoff function f_N, a sequence of payoffs $(f_n)_{n=0,1,\dots,N}$ is given, where f_n is $\mathcal{F}_n$-measurable, i.e. $(f_n)_n$ is adapted to $(\mathcal{F}_n)_n$. So f_n is the random payoff if the option is exercised at time n. Clearly, the exercise time has to be a stopping time.

6.1 Reminder: Doob's optional sampling theorem

11. Theorem (Opcionális megállási tétel (Doob))**.** *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, σ, τ megállási idők, $\sigma \leq \tau$ m.b. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}|X_\sigma| < \infty$, $\mathbf{E}|X_\tau| < \infty$ és $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau > n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$. Ekkor $\mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$ m.b.*

A tétel feltételei mellett, ha $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ martingál, akkor $\mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$ m.b.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy τ korlátos, $\tau \leq m$. A szubmartingál és a feltételes várható érték definíciója szerint azt kell megmutatnunk, hogy minden $A \in \mathcal{F}_\sigma$ eseményre

$$\int_A (X_\tau - X_\sigma)\, \mathrm{d}\mathbf{P} \geq 0.$$

Írjuk át az integrandust

$$X_\tau - X_\sigma = \sum_{k=\sigma+1}^{\tau} (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=2}^{m} I(\sigma < k \leq \tau)(X_k - X_{k-1})$$

alakba. Vegyük észre, hogy $A \cap \{\sigma < k \leq \tau\} = (A \cap \{\sigma \leq k-1\}) \cap \{\tau \leq k-1\}^c$. Itt a metszet első tagja $\mathcal{F}_\sigma$ definíciója szerint $\mathcal{F}_{k-1}$-mérhető, a második tagja pedig a megállási idő definíciója szerint, így a metszet maga is elem az $\mathcal{F}_{k-1}$ σ-algebrának. Ezt, feltételes várható érték és a szubmartingál definícióját használva

$$\begin{aligned}
\int_A (X_\tau - X_\sigma)\mathrm{d}\mathbf{P} &= \int_A \sum_{k=2}^{m} I(\sigma < k \leq \tau)(X_k - X_{k-1})\mathrm{d}\mathbf{P} \\
&= \sum_{k=2}^{m} \int_{A\cap\{\sigma<k\leq\tau\}} (X_k - X_{k-1})\mathrm{d}\mathbf{P} \\
&= \sum_{k=2}^{m} \int_{A\cap\{\sigma<k\leq\tau\}} \left(\mathbf{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}\right)\mathrm{d}\mathbf{P} \geq 0,
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó.

Az általános esetben a τ, σ megállási időkről át kell térni a $\tau \wedge n$, $\sigma \wedge n$ korlátos megállási időkre, és belátni, hogy a kimaradó tagok 0-hoz tartanak egy részsorozat mentén. Ezt nem bizonyítjuk, a részletekért lásd [1]. □

2. Corollary. *Ha* $\mathbf{E}|X_\tau| < \infty$ *és* $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau>n\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbf{P} = 0$*, akkor ha*

(i) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ *szubmartingál, akkor* $\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_1] \geq X_1$ *m.b., és persze* $\mathbf{E}X_\tau \geq \mathbf{E}X_1$*;*

(ii) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ *martingál, akkor* $\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_1] = X_1$ *m.b., és persze* $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_1$*.*

Fontos megjegyezni, hogy a tételben szereplő feltételek nem csupán technikai feltételek. Legyen S_n egy egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen. Ő martingál a az általa generált természetes filtrációra nézve. Tudjuk, hogy az egydimenziós bolyongás rekurrens, ezért majdnem biztosan eléri az 1-et. Legyen az elérés időpontja τ. Ekkor τ megállási idő, és persze $S_\tau \equiv 1 \neq S_0 = 0$. Csak a $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau>n\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbf{P} = 0$ feltétellel lehet baj, és valóban, ez nem teljesül.

$(f_n)_n \quad f_n \quad \mathcal{F}_n$-mh.

$\sup_{\tau \text{ megállási idő}} \mathbb{E} f_\tau$

6.2 Optimal stopping problems

Consider a probability space with a filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}, \mathbf{P})$, and let

$$\mathcal{M}_n^N = \{\tau : \tau \text{ is a stopping time}, \tau \in \{n, \dots, N\}\}.$$

To ease notation we suppress N in the upper index. Consider a sequence of nonnegative adatped random variables $(X_n)_n$, and define by backward induction its Snell-envelope $(Z_n)_n$ as follows. We are interested in the value

(megállás) ↙ megyek tovább

$$Z_N = X_N, \quad Z_n = \max\{X_n, \mathbf{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}, \ n < N.$$

For a stopping time τ the stopped process is denoted by Z^τ, i.e.

$$Z_n^\tau = Z_{\tau \wedge n}.$$

$a \wedge b = \min\{a, b\}$

Proposition 4. *Let (Z_n) be the Snell-envelope of (X_n) with $X_n \geq 0$ a.s.*

(i) Z is the smallest supermartingale dominating X.

(ii) The random variable $\tau^* = \min\{n : Z_n = X_n\}$ is a stopping time and the stopped process $Z_{n \wedge \tau^*} = Z_n^{\tau^*}$ is martingale.

Proof. From the definition it is clear that Z is supermatingale and dominates X. Let Y be another supermaringale dominating X. Then $Y_N \geq X_N = Z_N$. Assuming that $Y_n \geq Z_n$ we have

Y tul. ... X ... indukció ... X ... def.

$$Y_{n-1} \geq \max\{\mathbf{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}], X_{n-1}\} \geq \max\{\mathbf{E}[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}], X_{n-1}\} = Z_{n-1}.$$

Thus the minimality follows.

To see that τ^* is stopping time note that

$$\{\tau^* = n\} = \cap_{k=0}^{n-1}\{Z_k > X_k\} \cap \{Z_n = X_n\}.$$

For the last assertion note that

$$Z_n^{\tau^*} - Z_{n-1}^{\tau^*} = I(\tau^* \geq n)(Z_n - Z_{n-1}).$$

On the event $\{\tau^* \geq n\}$ we have $Z_{n-1} = \mathbf{E}[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ therefore

$$\mathbf{E}[I(\tau^* \geq n)(Z_n - Z_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

□