A véletlen módszer

Kevei Péter

Az előadásban a valószínűségszámítás alkalmazhatóságát mutatjuk be a matematika különböző területein, három példán keresztül. Először gráfelméleti alkalmazásként a Ramsey-számokra adunk alsó becslést. A második példában a klasszikus analízisbeli Weierstrass-féle approximációs tételt igazoljuk, végül egy egyszerű számelméleti példát mutatunk.

Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $R(k)$ a legkisebb olyan n számot, melyre igaz, hogy egy n csúcsú teljes gráf (K_n) éleit tetszőleges módon pirossal és kékkel színezve a gráfban találhatunk egyszínű teljes k csúcsú részgráfot.

Megmutatjuk, hogy $R(k) \leq 2^{2k}$. Ehhez nem lesz szükség véletlenre. Tekintsük egy $n = 2^{2k}$ csúcsú teljes gráf egy tetszőleges színezését. A következőkben megadunk egy egyszínű K_k-t. Legyen x_1 egy tetszőleges csúcs. Neki $2^{2k} - 1$ szomszédja van, ezért a skatulya elv szerint van legalább 2^{2k-1} olyan szomszédja, akivel ugyanolyan színű éllel van összekötve. Jelölje A_2 ezen szomszédok halmazát. Most válasszunk egy tetszőleges $x_2 \in A_2$ csúcsot. Az A_2 halmazban neki legalább $2^{2k-1} - 1$ szomszédja van, ezért skatulya elv szerint van legalább 2^{2k-2} olyan szomszédja, akivel ugyanolyan színű éllel van összekötve (ez a szín persze nem biztos, hogy ugyanolyan, mint ami a x_1x_2 él színe). Ezt folytatva, kapunk egy $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2k}\}$ sorozatot, melyre az teljesül, hogy az x_ix_j, $i < j$, él színe csak i-től függ. Ismét a skatulya elv szerint van k olyan csúcs, melyekre ez a szín azonos. Találtunk egy egyszínű K_k-t.

Most belátjuk, hogy $R(k) \geq 2^{k/2}$. A bizonyítás *Erdős Páltól* származik 1947-ből. Vegyünk egy n csúcsú teljes gráfot és színezzük ki az éleit egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel pirosra vagy kékre. Azaz minden egyes élre földobunk egy érmét. Annak a valószínűsége, hogy *rögzített* $\{x_1, \ldots, x_k\}$ csúcsok által meghatározott gráf egyszínű K_k az $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$, hiszen vagy minden él piros, vagy minden él kék, és pontosan $\binom{k}{2}$ él van. Tehát annak a valószínűsége, hogy lesz egyszínű K_k legfeljebb $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$. Némi számolással kapjuk, hogy ha $n \leq 2^{k/2}$, akkor ez az érték kisebb, mint 1. Azaz, pozitív valószínűséggel nem lesz egyszínű K_k, ami éppen azt jelenti, hogy van olyan színezés, amiben nincs egyszínű K_k. Így $R(k) \geq 2^{k/2}$.

Weierstrass approximációtétele szerint a polinomok szuprémum normában sűrűn vannak a zárt intervallumon folytonos függvények terében. Az alábbiakban erre adunk egy konstruktív bizonyítást. Legyen f folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon. A hozzátartozó n-edik *Bernstein-polinom*

$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Ekkor $B_n(f)$ egyenletesen konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $B_n(f)(x) = \mathbf{E}f(S_n/n)$, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, és $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású Bernoulli(x) véletlen változók (azaz $\mathbf{P}(X_1 = 1) = x = 1 - \mathbf{P}(X_1 = 0)$). A Csebisev-egyenlőtlenség szerint $\mathbf{P}(|S_n/n - x| > c) \le \mathbf{Var}(S_n)/(n^2c^2) = x(1-x)/(nc^2)$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel folytonos függvény zárt intervallumon egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|u - v| \le \delta$ esetén $|f(u) - f(v)| \le \varepsilon$. Így

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &= |\mathbf{E}\left[f(x) - f(S_n/n)\right]| \le 2M\mathbf{P}(|S_n/n - x| > \delta) + \varepsilon \\ &\le 2M\frac{\mathbf{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} + \varepsilon \le \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} + \varepsilon,\end{aligned}$$

ahol M az $|f|$ maximuma a $[0,1]$ intervallumon. A kapott becslés x-ben egyenletes, ezért az állítást beláttuk.

Egyszerű számélméleti alkalmazásként az *Euler-féle φ-függvényre* vonatkozó formulát vezetjük le. Jelölje $\varphi(n)$ az n-hez relatív prímek számát az $\{1,\ldots,n\}$ számok között. A $\varphi(n)/n$ hányados éppen annak a valószínűsége, hogy az $\{1,\ldots,n\}$ számok közül egyenletes eloszlás szerint egyet választva, n-hez relatív prímet kapunk. Legyenek $p_1,\ldots,p_k$ az n prímosztói (multiplicitás nélkül), és jelölje A_i azt az eseményt, hogy a választott szám p_i-vel osztható. Egyszerűen látható, hogy az $A_1,\ldots,A_k$ események függetlenek és $\mathbf{P}(A_i) = 1/p_i$. A keresett esemény pedig $A_1^c \cap \ldots \cap A_k^c$. Tehát

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \mathbf{P}\left(A_1^c \cap \ldots A_k^c\right) = \mathbf{P}(A_1^c)\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_k^c) = \left(1 - p_1^{-1}\right)\ldots\left(1 - p_k^{-1}\right).$$

Átszorozva kapjuk az állítást.

Hivatkozások

[1] Tim Gowers: The Two Cultures of Mathematics, `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf`

[2] Noga Alon, Joel Spencer: *The Probabilistic Method*, 2008.

[3] Patrick Billingsley: *Probability and Measure*, 1995.