Véletlen permutációk és rab matematikusok

Kevei Péter

SZTE Bolyai Intézet
Sztochasztika Tanszék

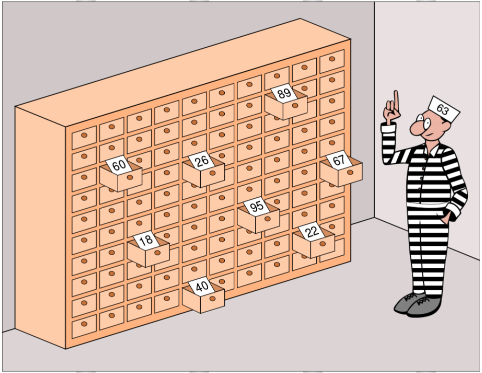
Egyetemi Tavasz
2022. április 23.

100 rab problémája

100 halálraítélt, 1-től 100-ig megszámozott rabnak a börtönigazgató ad egy utolsó esélyt. Az igazgató egy 100 fiókos (ugyancsak 1-től 100-ig számozott) szekrény fiókjaiba beteszi (véletlen sorrendben) a számokat. Minden fiókba pontosan egy szám kerül. Ezután a rabok egyesével bemennek a szobába, ahol kinyithatnak 50 fiókot. A fiókokat visszacsukják, a szekrényben nem rendezhetik át a számokat, mindent úgy hagynak, ahogy volt. Ha *minden* rab megtalálja a saját számát, akkor kiszabadulnak, különben mindegyiküket kivégzik. (Gál Anna, Peter Bro Miltersen (2003))

100 rab problémája

- egyesével
- minden rab pontosan ugyanúgy hagyja a szobát
- 50 fiókot nyithat ki
- előtte lehet beszélni
- utána, közben nem
- mindenkinek meg kell találnia a számát



Forrás: Wikimedia

1. stratégia

Minden rab véletlenszerűen kinyit 50 fiókot.

1. stratégia

Minden rab véletlenszerűen kinyit 50 fiókot.
Mennyi a szabadulás esélye?

- Egyetlen rab megtalálja a saját számát: $\frac{1}{2}$
- Mind megtalálja: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}$

Kvíz

Quizizz!

$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ nagyjából annak a valószínűsége, hogy

- dobókockával 10-szer egymás után 6-ost dobunk
- 4 egymás utáni héten $(1, 2, 3, 4, 5)$ számokat húzzák ki a lottón
- a Barcelona megnyeri idén a spanyol bajnokságot

Definíció

- Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük.

Definíció

- Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük.
- Egy halmaz elemeinek sorbarendezése. Véges, n elemű halmaz esetén az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit rendezzük sorba.

Kvíz

Quizizz!

Hányféleképpen lehet 4 elemet sorbarendezni?

- 4^4
- 24
- 2^4
- 4^2

Tulajdonságok

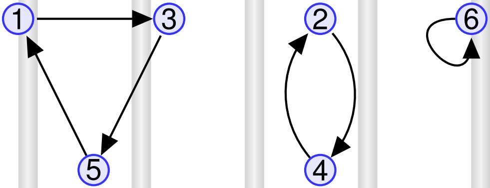
- Permutációk megadása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- n elemű halmaz lehetséges permutációinak száma: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Ciklusok

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$



(135)(24)(6)

Kvíz

Quizizz!

4 elemű halmaznak hány olyan permutációja van, melyben a 4 fixpont?

- 4^3
- 6
- 24
- 2^3

Kvíz

Quizizz!

Mi az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció ciklusfelbontása?

- (14)(32)
- (143)(2)
- (4213)
- (421)(2)

Kvíz

Quizizz!

4 elemű halmaznak hány olyan permutációja van, melyben egyetlen ciklus van?

- 4^3
- 6
- 24
- 2^3

2. stratégia

Minden rab először kinyitja a sorszámának megfelelő fiókot. Aztán kinyitja azt a fiókot, amelyiknek a sorszámát megtalálta az előbb, és ezt folytatja.

Példa (6 fiók, 3 próba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- 1. rab: $1 \to 3 \to 5$
- 2. rab: $2 \to 4$
- 3. rab: $3 \to 5 \to 1$
- 4. rab: $4 \to 2$
- 5. rab: $5 \to 1 \to 3$
- 6. rab: 6 Hurrá!

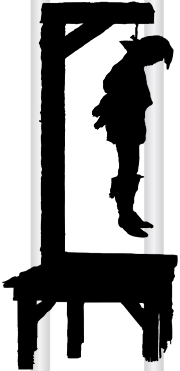
2. Példa (6 fiók, 3 próba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- 1. rab: $1 \to 3 \to 5$ vége

2. Példa (6 fiók, 3 próba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



- 1. rab: $1 \to 3 \to 5$ vége

Kvíz

Quizizz!

Kiszabadulnak-e az alábbi elrendezésnél a ciklusstratégiával?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- igen
- nem

Szabadulás valószínűsége

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.
Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban:

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51}$

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.
Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51}$
- 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van:

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51}$
- 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: 50!

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.
Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51}$
- 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: 50!
- a maradék 49 elemet tetszőlegesen permutálhatom:

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.
Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51}$
- 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: 50!
- a maradék 49 elemet tetszőlegesen permutálhatom: 49!

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.
Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51}$
- 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: 50!
- a maradék 49 elemet tetszőlegesen permutálhatom: 49!
- tehát:

$$\binom{100}{51} 50! \cdot 49! = \frac{100!}{51!49!} \cdot 50! \cdot 49! = \frac{100!}{51}.$$

Szabadulás valószínűsége

Hasonlóan, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus k, $k \geq 51$:

$$\binom{100}{k}(k-1)!(100-k)! = \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Szabadulás valószínűsége

Hasonlóan, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus k, $k \geq 51$:

$$\binom{100}{k}(k-1)!(100-k)! = \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Összegezve, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$100! \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}\right].$$

Szabadulás valószínűsége

Hasonlóan, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus k, $k \geq 51$:

$$\binom{100}{k}(k-1)!(100-k)! = \frac{100!}{k!(100-k)!}\cdot(k-1)!\cdot(100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Összegezve, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$100!\left[\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}\right].$$

Tehát, annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}$$

Szabadulás valószínűsége

Annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus nem hosszabb, mint 50,

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right],$$

ami éppen a szabadulás valószínűsége.

Szabadulás valószínűsége

Annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus nem hosszabb, mint 50,

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right],$$

ami éppen a szabadulás valószínűsége.
Na és ez mennyi?

Kvíz

Quizizz!

Közelítőleg mennyi az alábbi összeg

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}?$$

- $0,01$
- $0,36$
- $0,69$
- $3,14$

Szabadulás valószínűsége

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100} \sim \int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln 2 \approx 0{,}69$$

így

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100} \right] \approx 0{,}31$$

Szabadulás valószínűsége

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100} \sim \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln 2 \approx 0{,}69$$

így

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right] \approx 0{,}31$$

A ciklus stratégia optimális (Warshauer, Curtin, 2006).

Mi történt?

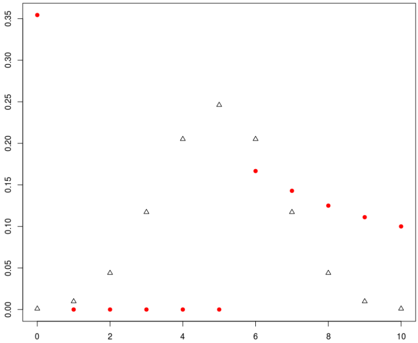
- Az, hogy egy rögzített rab megtalálja a saját számát, továbbra is $1/2$. Ezt semmilyen stratégia nem befolyásolja, hiszen mindig 50 fiókot nyit ki a 100-ból, és nincs semmilyen információja.

Mi történt?

- Az, hogy egy rögzített rab megtalálja a saját számát, továbbra is $1/2$. Ezt semmilyen stratégia nem befolyásolja, hiszen mindig 50 fiókot nyit ki a 100-ból, és nincs semmilyen információja.
- A ciklusstratégia azt éri el, hogy ha legalább egyvalaki nem találja meg a számát, akkor legalább 51-en nem találják meg a számokat. Hiszen a hosszú ciklusban senki nem találja meg. Ezzel szemben, az 1. stratégia esetén lehet, hogy csak egy nem találja meg a számát, az összes többi igen, de ezért is halál jár.

Mi történt?

Nemtalált rabok számának eloszlása (10 rab, 5 próba):



Várhatóan mindkét esetben 5 rab nem talál.

Egy határeloszlás-tétel

Tekintsük $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy véletlen permutációját, és jelölje Y_n a leghosszabb ciklus hosszát. Megmutattuk, hogy

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{k}, \quad k = [n/2] + 1, [n/2] + 2, \ldots, n.$$

Egy határeloszlás-tétel

Tekintsük $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy véletlen permutációját, és jelölje Y_n a leghosszabb ciklus hosszát. Megmutattuk, hogy

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{k}, \quad k = [n/2] + 1, [n/2] + 2, \ldots, n.$$

Tehát, ha $x \in (1/2, 1)$

$$\mathbf{P}(Y \geq nx) = \sum_{k=[nx]}^{n} \frac{1}{k} \sim -\ln x,$$

másképpen

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq x\right) = 1 + \ln x, \quad x \in [1/2, 1].$$

Fixpontok száma

Tekintsük $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy véletlen permutációját, X_n a fixpontok száma. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots \quad \text{Poisson}(1)$$

Speciálisan

$$\mathbf{P}\,(\text{nincs fixpont}) \approx e^{-1} = 0{,}368.$$

Fixpontok száma

Tekintsük $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy véletlen permutációját, X_n a fixpontok száma. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots \quad \text{Poisson(1)}$$

Speciálisan

$$\mathbf{P}\,(\text{nincs fixpont}) \approx e^{-1} = 0{,}368.$$

Ha $X_n(\ell)$ az ℓ hosszú ciklusok száma, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n(\ell) = k) = \frac{e^{-1/\ell}}{\ell^k \cdot k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Házi feladat

KöMaL B. 5018. A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással.
A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket.
(A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.)
Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?