Kockáztass okosan!

Kevei Péter

SZTE Bolyai Intézet
Sztochasztika Tanszék

Kutatók Éjszakája
2022. szeptember 30.

Tartalom

Alapfeladat

- Szerencsejátékosnak kezdetben x forintja van, addig játszik míg vagy a forintja lesz, vagy elveszti az összes pénzét.
- Minden játékban azonos p valószínűséggel nyeri meg a feltett y összeget, $1-p$ valószínűséggel elveszíti. Az y tétet a játékos választja (nemnegatív, és nem lehet több az aktuális pénzénél).

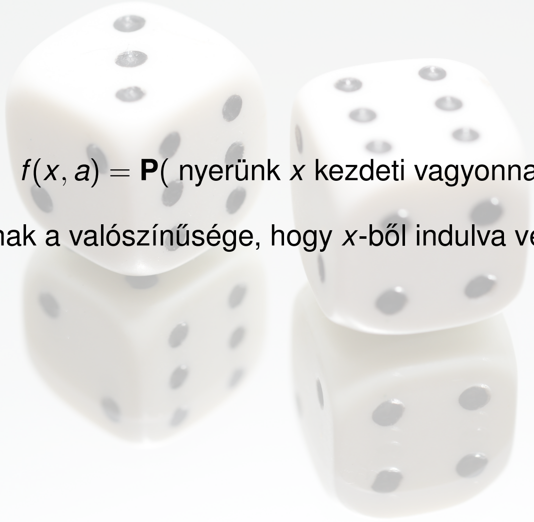
Mekkora valószínűséggel nyer, mi a jó stratégia?

Tartalom

- minden játékban 1 forintot tesz fel

Bolyongás

Másképpen: Egy bolyongó részecske a számegyenes egy egész pontjából indul, és minden lépésben p valószínűséggel egyet jobbra, $1 - p$ valószínűséggel egyet balra lép. Ezt addig folytatja, amíg el nem éri vagy a 0, vagy az a pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a bolyongó részecske az a pontban köt ki?



Legyen

$$f(x, a) = \mathbf{P}(\text{ nyerünk } x \text{ kezdeti vagyonnal }),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy x-ből indulva végül nyerünk.

Legyen

$$f(x, a) = \mathbf{P}(\text{ nyerünk } x \text{ kezdeti vagyonnal }),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy x-ből indulva végül nyerünk. Ekkor $f(0, a) = 0$, $f(a, a) = 1$,

Legyen

$$f(x, a) = \mathbf{P}(\text{ nyerünk } x \text{ kezdeti vagyonnal }),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy x-ből indulva végül nyerünk. Ekkor $f(0, a) = 0$, $f(a, a) = 1$, és

$$f(x, a) = p \cdot f(x+1, a) + (1-p) \cdot f(x-1, a), \quad x = 1, 2, \ldots, a-1,$$

Legyen

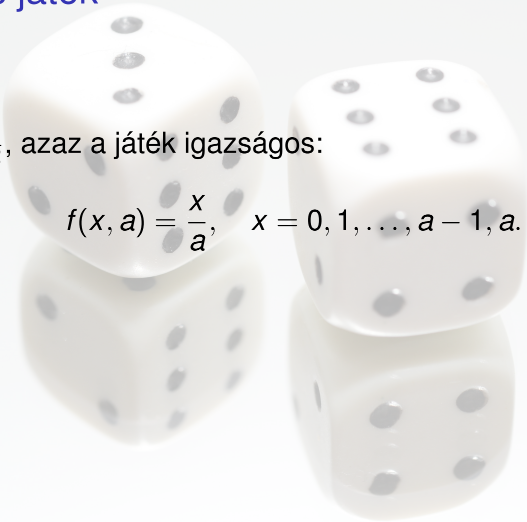
$$f(x, a) = \mathbf{P}(\text{ nyerünk } x \text{ kezdeti vagyonnal }),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy x-ből indulva végül nyerünk.
Ekkor $f(0, a) = 0$, $f(a, a) = 1$, és

$$f(x, a) = p \cdot f(x+1, a) + (1-p) \cdot f(x-1, a), \quad x = 1, 2, \ldots, a-1,$$

Ez $(a-1)$ db egyenlet és $(a-1)$ db ismeretlen. HF

Igazságos játék



Ha $p = \frac{1}{2}$, azaz a játék igazságos:

$$f(x, a) = \frac{x}{a}, \quad x = 0, 1, \ldots, a-1, a.$$

Igazságos játék

Ha $p = \frac{1}{2}$, azaz a játék igazságos:

$$f(x, a) = \frac{x}{a}, \quad x = 0, 1, \ldots, a-1, a.$$

- x forinttal indul, végül
- $\frac{x}{a}$ eséllyel a forintja van, $1 - \frac{x}{a}$ eséllyel 0.

Azaz várhatóan annyi pénze lett, amivel indult.

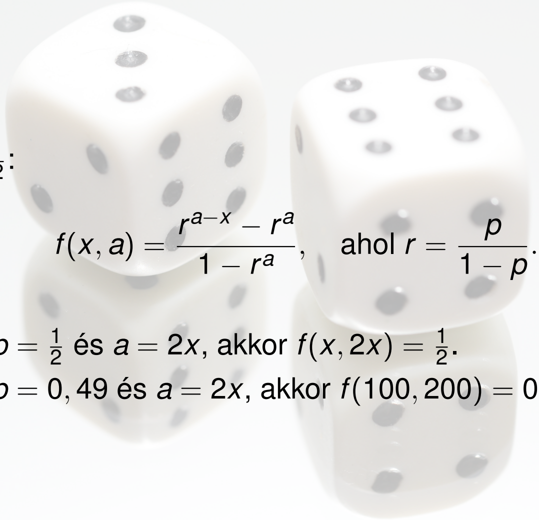
Kvíz

Quizizz!

A játékosnak 90 Ft-ja van kezdetben, és addig játszik, míg 100 Ft-ja lesz, vagy elfogy a pénze. Igazságos játék esetén mennyi a valószínűsége, hogy 100 Ft-ja lesz?

- 0.5
- 1
- 0.9
- 0.1

Általában

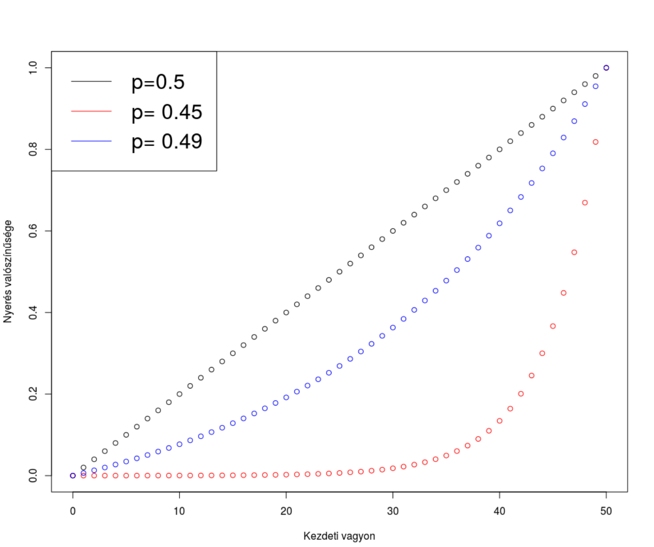


Ha $p \neq \frac{1}{2}$:

$$f(x,a) = \frac{r^{a-x} - r^a}{1 - r^a}, \quad \text{ahol } r = \frac{p}{1-p}.$$

- Ha $p = \frac{1}{2}$ és $a = 2x$, akkor $f(x, 2x) = \frac{1}{2}$.
- Ha $p = 0,49$ és $a = 2x$, akkor $f(100, 200) = 0,018$.

$a = 50$


p=0.5
p= 0.45
p= 0.49
Nyerés valószínűsége
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50
Kezdeti vagyon

Rulett

- Számok 0-tól 36-ig: 18 piros, 18 fekete, 1 zöld
- piros - fekete: $p = 18/37 = 0.486$
- $f(90, 100) = ??$

Kvíz

Quizizz!

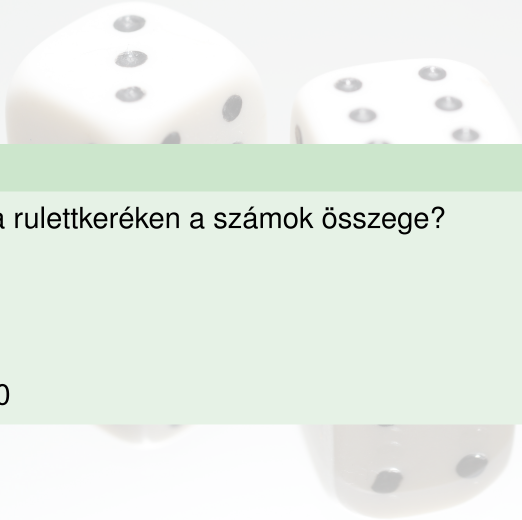
Rulettnél, piros-fekete játéknál mennyi $f(90, 100)$ értéke?

- 0.85
- 0.58
- 0.35
- 0.07

Rulett

- Számok 0-tól 36-ig: 18 piros, 18 fekete, 1 zöld
- piros - fekete: $p = 18/37 = 0.486$
- $f(90, 100) = 0.58$

Kvíz

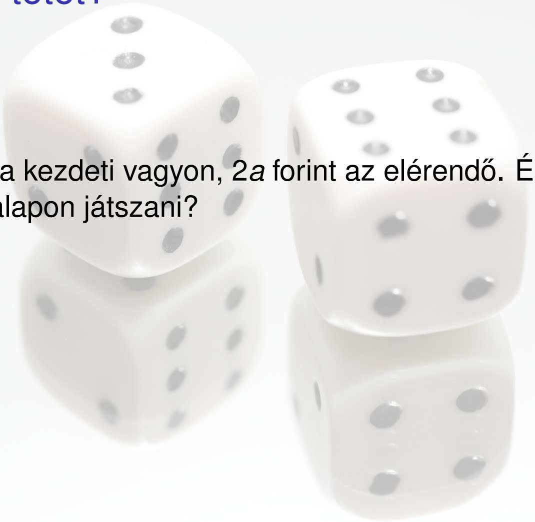


Quizizz!

Mennyi a rulettkeréken a számok összege?

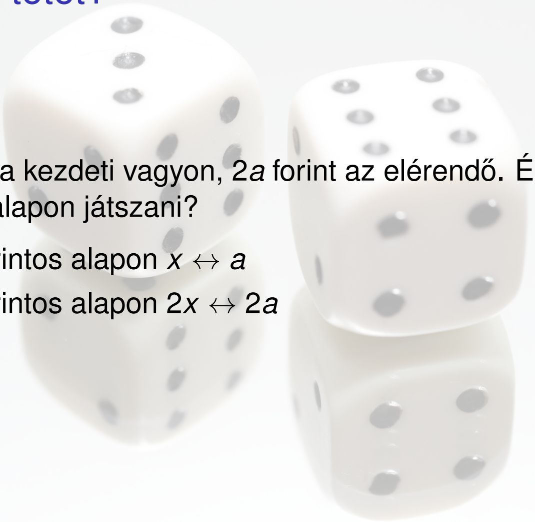
- 37
- 100
- 666
- 1000

Emeljük a tétet?



$2x$ forint a kezdeti vagyon, $2a$ forint az elérendő. Érdemes-e 2 forintos alapon játszani?

Emeljük a tétet?



$2x$ forint a kezdeti vagyon, $2a$ forint az elérendő. Érdemes-e 2 forintos alapon játszani?

- 1 forintos alapon $x \leftrightarrow a$
- 2 forintos alapon $2x \leftrightarrow 2a$

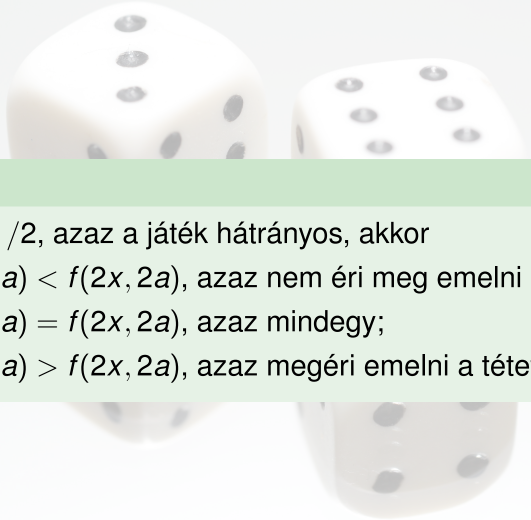
Emeljük a tétet?

$2x$ forint a kezdeti vagyon, $2a$ forint az elérendő. Érdemes-e 2 forintos alapon játszani?

- 1 forintos alapon $x \leftrightarrow a$
- 2 forintos alapon $2x \leftrightarrow 2a$

Tehát 2 forintos alapon a nyerési esély: $f(x, a)$, míg 1 forintos alapon $f(2x, 2a)$.

Kvíz



Quizizz!

Ha $p < 1/2$, azaz a játék hátrányos, akkor

- $f(x, a) < f(2x, 2a)$, azaz nem éri meg emelni a tétet;
- $f(x, a) = f(2x, 2a)$, azaz mindegy;
- $f(x, a) > f(2x, 2a)$, azaz megéri emelni a tétet.

Emeljük a tétet?

$$f(x, a) > f(2x, 2a) \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}.$$

azaz pontosan akkor éri meg emelni a tétet, ha a játék hátrányos.

Tartalom

Aktuális vagyon n-edik játék után X_n, tét az n-edik játékban Y_n. Elérendő: a.

- Ha $X_n \leq a/2$, akkor $Y_{n+1} = X_{n+1}$ (all in!)
- Ha $X_n > a/2$, akkor $Y_{n+1} = a - X_{n+1}$, azaz annyit tesz fel, amennyi a nyeréshez kell.

Kvíz

Quizizz!

Merész stratégiával játszva, ha kezdetben 6 Ft-unk van, és 10 az elérendő, akkor ha az első játékban vesztünk, a másodikban nyerünk, mennyi pénzünk lesz?

- 10
- 0
- 4
- 8

Merész stratégia:

- nincs legkisebb, legnagyobb tét;
- x kezdeti vagyon a elérendő, ugyanaz mint $2x$ kezdeti vagyon $2a$ az elérendő
- azaz a merész stratégia skálázható, csak a $\frac{\text{kezdeti vagyon}}{\text{elérendő}}$ arány számít
- legyen $a = 1$

Skálázzunk!

Elérendő: 1. Vagyon $x \in [0, 1]$. A tét X_n, ha $X_n \leq \frac{1}{2}$, és $1 - X_n$, ha $X_n \geq \frac{1}{2}$.

- $X_0 = 0.7$, tét 0.3
- vesztünk, $0.7 - 0.3 = 0.4$ pénzünk van, tét 0.4
- nyerünk, $0.4 + 0.4 = 0.8$ pénzünk van, tét 0.2
- nyerünk, $0.8 + 0.2 = 1$ vége

Merész stratégia

Legyen $F(x)$ a nyerés valószínűsége. Ekkor $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, és

Merész stratégia

Legyen $F(x)$ a nyerés valószínűsége. Ekkor $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, és

$$F(x) = \begin{cases} p \cdot F(2x), & x \le \frac{1}{2}, \\ p + (1-p) \cdot F(2x-1), & x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Kvíz

Quizizz!

Mennyi $F(1/2)$ értéke?

- p
- $1 - p$
- $\frac{1}{2}$
- p^2

Nyerés valószínűsége

$$F(x) = \begin{cases} p \cdot F(2x), & x \leq \frac{1}{2}, \\ p + (1-p) \cdot F(2x-1), & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

Nyerés valószínűsége

$$F(x) = \begin{cases} p \cdot F(2x), & x \leq \frac{1}{2}, \\ p + (1-p) \cdot F(2x-1), & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

- $F(1/2) = pF(1) = p$

Nyerés valószínűsége

$$F(x) = \begin{cases} p \cdot F(2x), & x \leq \frac{1}{2}, \\ p + (1-p) \cdot F(2x-1), & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

- $F(1/2) = pF(1) = p$
- $F(1/4) = pF(1/2) = p^2$

Nyerés valószínűsége

$$F(x) = \begin{cases} p \cdot F(2x), & x \leq \frac{1}{2}, \\ p + (1-p) \cdot F(2x-1), & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

- $F(1/2) = pF(1) = p$
- $F(1/4) = pF(1/2) = p^2$
- $F(3/4) = p + (1-p)F(1/2) = 2p - p^2$

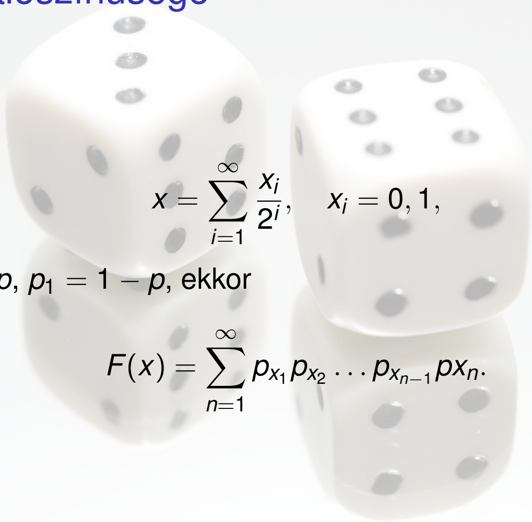
Kvíz

Quizizz!

Mennyi $F(1/8)$ értéke?

- $p(1-p)$
- p
- p^3
- $p^2(1-p)$

Nyerés valószínűsége

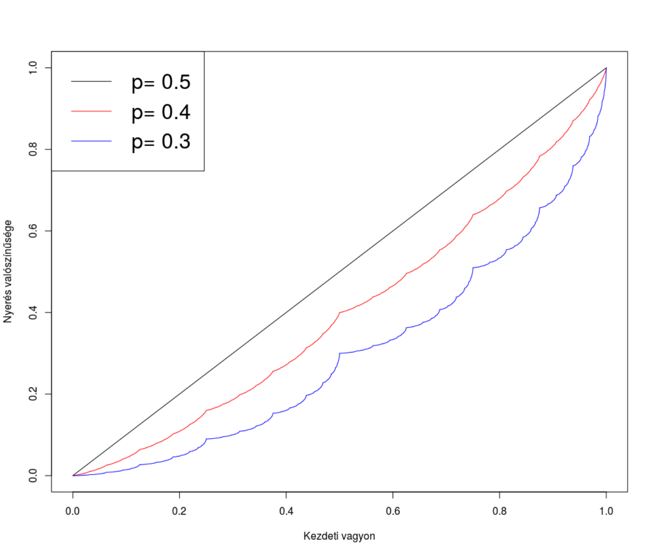


$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, \qquad x_i = 0, 1,$$

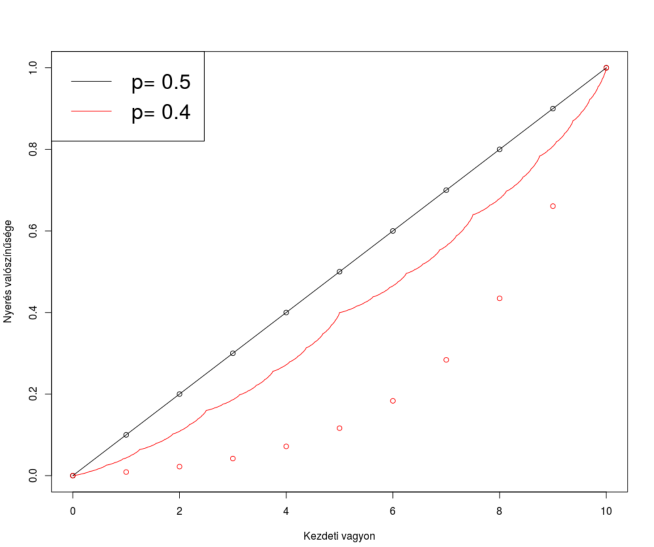
és $p_0 = p$, $p_1 = 1 - p$, ekkor

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{x_1} p_{x_2} \dots p_{x_{n-1}} p x_n.$$

Nyerés valószínűsége



Óvatos vs. merész



Tartalom

Előnyös játék

Tétel

Ha $p \geq 0.5$, és van minimum tétet, akkor az óvatos stratégia optimális. Ekkor a nyerés valószínűsége

$$\frac{r^a - r^{a-x}}{r^a - 1}.$$

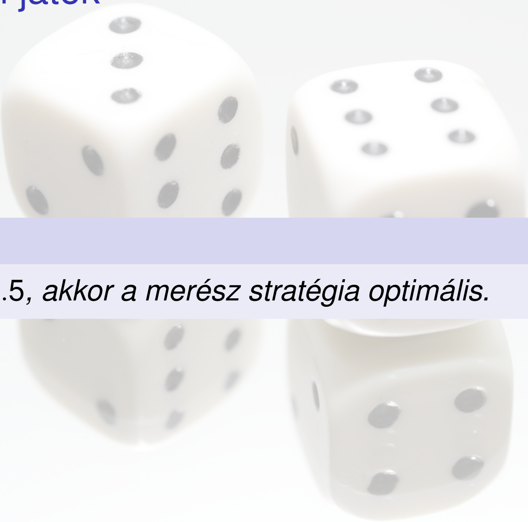
Kvíz

Quizizz!

Mi a nyerés valószínűsége optimális stratégia mellett előnyös játék esetén, ha nincs minimum tét?

- 0
- 0.5
- p
- 1

Előnytelen játék



Tétel

Ha $p \leq 0.5$, akkor a merész stratégia optimális.

Kvíz

Quizizz!

Melyik regényben játszotta el Piszkos Fred a részvénytársaság hajóbérlésre szánt pénzét?

- Piszkos Fred a kapitány
- Az elveszett cirkáló
- Piszkos Fred közbelép Fülig Jimmy őszinte sajnálatára
- mindháromban