Véletlen fixpontegyenletekről

Kevei Péter

TDK szeminárium
2018. április 9.

Tartalom

Pénzügyi matematikai motiváció

A $0, 1, 2, \ldots$ időpontokban 1 forintot befektetünk egy kötvénybe, melynek δ a kamata. X_n a befektetés értéke n időpontban. Ekkor

$$X_0 = 0,\ X_1 = 1 + (1+\delta),\ X_2 = 1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2, \ldots$$

$$X_{n+1} = 1 + (1+\delta)X_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

A kamat véletlentől függ (hát persze), és a befektetés nagysága is:

$$X_{n+1} = B_{n+1} + A_{n+1}X_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

ahol $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots$ független azonos eloszlású véletlen vektorok.

Markov-láncok

$$X_{n+1} = B_{n+1} + A_{n+1}X_n, \; n = 1, 2, \dots,$$

ahol $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots$ független azonos eloszlású véletlen vektorok. Ekkor (X_n) egy Markov-lánc.

Bizonyos feltételek mellett $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X_\infty$, azaz

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = P(X_\infty \le x).$$

Ekkor

$$X_\infty \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX_\infty + B,$$

azaz a stacionárius eloszlás egy fixpontegyenlet megoldása.

Bolyongás maximuma

$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ független azonos eloszlású véletlen változók, $E\xi < 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $M = \max\{0, S_1, S_2, \ldots\}$. Nagy számok erős törvénye szerint

$$\frac{S_n}{n} \to E\xi < 0 \Rightarrow S_n \to -\infty,$$

tehát M jóldefiniált.

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{0, \xi_1 + \max\{0, \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \ldots\}\right\} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \max\{0, \xi + M\} \end{aligned}$$

$$e^M \stackrel{\mathcal{D}}{=} \max\left\{1, e^{\xi} e^M\right\}$$

Elágazó folyamatok bevándorlással

Egy egyed utódainak száma az n-edik generációban: $A_i^{(n+1)}$, bevándorlók: B_{n+1} (nemnegatív egész értékű véletlen változók), és minden mindentől független.
A folyamat:

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} A_i^{(n+1)} + B_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Ha van stacionárius eloszlás, akkor

$$X_\infty \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{X_\infty} A_i + B$$

Egy Erdős probléma

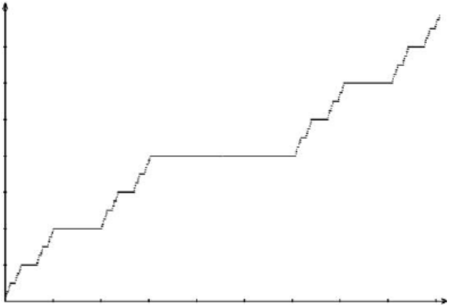
$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $P(\xi = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $a \in (0, 1)$.

$$X(a) = X = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \xi_i.$$

Ez egy véges véletlen változó. Milyen az eloszlása?
$a = 1/2$ egyenletes $[-1, 1]$-en (kettes számrendszerben írjuk föl a számokat)
$a < 1/2$ folytonos szinguláris (1935)

Szinguláris eloszlás

Az eloszlásfüggvény folytonos, de a tömeg egy nagyon kis halmazra (0 mértékű) koncentrálódik. Pl. ördög lépcsőháza / Cantor-féle függvény



Egy Erdős probléma

$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $P(\xi = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $a \in (0, 1)$.

$$X(a) = X = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \xi_i.$$

Ez egy véges véletlen változó. Milyen az eloszlása?
$a = 1/2$ egyenletes $[-1, 1]$-en (kettes számrendszerben írjuk föl a számokat)
$a < 1/2$ folytonos szinguláris (1935)
$a \in [1/2, 1]$ majdnem minden a-ra abszolút folytonos (Solomyak, 1995)
Na de vannak olyan $a > 1/2$ értékek, melyre folytonos szinguláris az eloszlás; pl. $a = (\sqrt{5} - 1)/2$ (Erdős, 1939, Fourier-módszerrel). Pisot-számok (speciális algebrai egészek)

Abszolút folytonos

F abszolút folytonos, ha létezik f:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y.$$

Egy Erdős probléma

$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $P(\xi = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $a \in (0,1)$.

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \xi_i = a\xi_1 + a \sum_{i=2}^{\infty} a^{i-1} \xi_i.$$

Vegyük észre

$$\sum_{i=1}^{\infty} a^i \xi_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=2}^{\infty} a^{i-1} \xi_i$$

(azaz a két véletlen változónak ugyanaz az eloszlása).

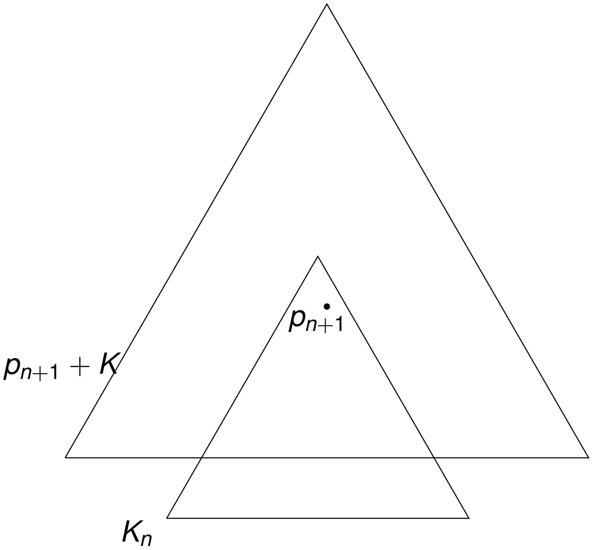
$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} a\xi_1 + aX,$$

ahol ξ_1 és X függetlenek.

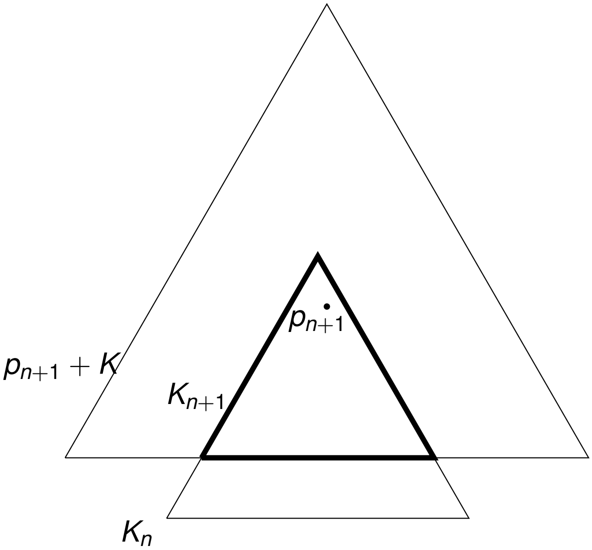
Sztochasztikus geometria

K szabályos d-dimenziós szimplex ($d = 1, 2$, szakasz, szabályos háromszög),
$K_0 = K$, p_{n+1} egyenletesen választott véletlen pont K_n-ben, és $K_{n+1} = K_n \cap (p_{n+1} + K)$.
$\{K_n\}$ egymásba ágyazott szabályos szimplexek sorozata, ami konvergál egy határszimplexhez.

Példák



Példák



Sztochasztikus geometria

K szabályos d-dimenziós szimplex ($d = 1, 2$, szakasz, szabályos háromszög), súlypontja $(0, 0, \ldots, 0)$, és csúcsai $(e_0, e_1, \ldots, e_d)$, $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.
$K_0 = K$, p_{n+1} egyenletesen választott véletlen pont K_n-ben, és $K_{n+1} = K_n \cap (p_{n+1} + K)$.
A határszimplex súlypontjának koordinátái (ez véletlen) teljesít egy

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B,$$

alakú d-dimenziós fixpontegyenletet (A mátrix, B, X vektorok).
(Ambrus & K & Vígh (2011); K & Vígh (2016))

Perpetuitási egyenlet

Speciális véletlen fixpontegyenlet:

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B,$$

ahol X, A, B véletlen változók, (A, B) és X függetlenek, és az egyenlőség eloszlásban értendő, azaz

$$P(X \leq x) = P(AX + B \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Adott (A, B), keressük X-et.

Perpetuitási egyenlet

Speciális véletlen fixpontegyenlet:

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B,$$

ahol X, A, B véletlen változók, (A, B) és X függetlenek, és az egyenlőség eloszlásban értendő, azaz

$$P(X \leq x) = P(AX + B \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Általánosabban

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \Psi(X),$$

ahol Ψ egy véletlen operátor, ami X-től független.
Pl. $\Psi(x) = Ax + B$, $\Psi(x) = \max\{Ax, B\}$, $\Psi(k) = \sum_{i=1}^{k} A_i + B$, ...

Kicsit más típusú egyenletek

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(X + X')$$

ahol X és X' függetlenek és azonos eloszlásúak.
Ez karakterizálja a standard normális eloszlást.
Stabilis eloszlások: $\forall a, b > 0$, $\exists c > 0$, $d \in \mathbb{R}$

$$aX + bX' \stackrel{\mathcal{D}}{=} cX + d$$

Létezés és egyértelműség

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B$$

Ha $E \log A < 0$, $E \log_+ |B| < \infty$, akkor létezik egyértelmű megoldás. (Szükséges és elegendő feltétel Goldie, Maller (2001))

Bizonyítás

Vegyük a $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ Markov-láncot.

$$\begin{aligned} X_n &= A_n X_{n-1} + B_n \\ &= A_n(A_{n-1}X_{n-2} + B_{n-1}) + B_n \\ &= A_n(A_{n-1}(A_{n-2}X_{n-3} + B_{n-2}) + B_{n-1}) + B_n. \end{aligned}$$

Tehát ha van stacionárius eloszlás, akkor az

$$X_\infty = B_1 + A_1 B_2 + A_1 A_2 B_3 + A_1 A_2 A_3 B_4 + \dots$$

alakú. Az általános tag

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \dots A_n &= \exp\left(\log A_1 + \log A_2 + \dots + \log A_n\right) \\ &\approx \exp\left(nE \log A\right) \le e^{-cn}, \end{aligned}$$

ezért a sor konvergens.

Kérdések

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B$$

Jó, van megoldás. Mit lehet róla tudni?

- Mi a megoldás? (nehéz, nem tudjuk)
- Milyen az eloszlás? (abszolút folytonos, folytonos szinguláris, diszkrét)
- Az eloszlás tartója? (milyen értékeket vehet föl)
- Milyen momentumai vannak? (várható érték, második momentum, exponenciális momentum)
- Az eloszlásfüggvény viselkedése a végtelenben? ($P(X > x)$, $x \to \infty$)

Momentumok és a farok

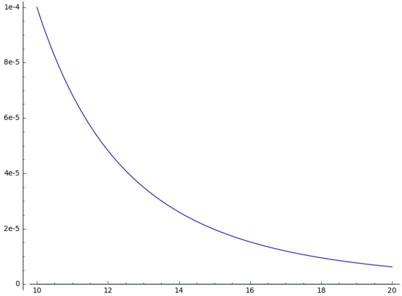
X eloszlásfüggvénye F: $F(x) = P(X \leq x)$. Ekkor $1 - F(x) \to 0$ amint $x \to \infty$, de milyen gyorsan?

$$E(X) = \int_0^\infty x\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty (1 - F(x))\mathrm{d}x.$$

Tehát ha $E(X) < \infty$, akkor $\lim_{x\to\infty} x[1 - F(x)] = 0$.
Hasonlóan, ha $E(X^k) < \infty$, akkor $\lim_{x\to\infty} x^k[1 - F(x)] = 0$.

Normális vs. Pareto

$Z \sim$ N(0,1), standard normális $P(Z > x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \to \infty$.
$X \sim$ Pareto(α), $\alpha > 0$, $P(X > x) = x^{-\alpha}$.



Nehézfarkú eloszlások

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B$$

Tétel (Kesten (1973), Grincevičius (1975), Goldie (1991))

Legyen $EA^\kappa = 1$, $EA^\kappa \log_+ A < \infty$, $\log A$ *nem centrált rácsos,* $E|B|^\kappa < \infty$. *Ekkor*

$$P\{X > x\} \sim c_+ x^{-\kappa} \text{ és } P\{X < -x\} \sim c_- x^{-\kappa} \text{ amint } x \to \infty.$$

X centrált rácsos eloszlású h rácsállandóval, ha $X \in \{0, \pm h, \pm 2h, \ldots\}$.
Ekkor A határozza meg a megoldás viselkedését.
Ha $P\{|A| > 1\} > 0$, akkor $P(X > x)$ hatványrendben csökken.

Nehézfarkú eloszlások II

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B$$

Tétel (Grincevičius (1975), Grey (1994))

Ha $A \geq 0$, $EA^{\kappa} < 1$, $EA^{\kappa+\epsilon} < \infty$ akkor $P(X > x) \sim \ell(x)x^{-\kappa}$ pontosan akkor, ha $P(B > x) \sim \ell'(x)x^{-\kappa}$, ahol ℓ, ℓ' lassú változású függvények.

$\ell : (0, \infty) \to (0, \infty)$ lassú változású, ha minden $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

(Tipikus példák: $\log x$, $(\log x)^3$, $\log\log x$, $1/\log x$, konstans.)
Ekkor B határozza meg a megoldás viselkedését.

Könnyűfarkú eloszlások

Tétel (Goldie & Grübel (1996))

$P(X > x)$ exponenciálisan lecseng, valahányszor $|A| \leq 1$.

Feltételek

$EA^\kappa = 1$, $\kappa > 0$. Legyen $F_\kappa(x) = \int_{-\infty}^x e^{\kappa y} F(\mathrm{d}y)$, $\log A \sim F$.
Tegyük föl $\overline{F}_\kappa(x) = 1 - F_\kappa(x) = \ell(x) x^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.
Megvágott várható érték:

$$m(x) = \int_0^x [F_\kappa(-u) + \overline{F}_\kappa(u)]\mathrm{d}u \sim \int_0^x \overline{F}_\kappa(u)\mathrm{d}u \sim \frac{\ell(x) x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Tfh (Caravenna–Doney feltétel (2017))

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{x\to\infty} x\overline{F}_\kappa(x)\int_1^{\delta x}\frac{1}{y\overline{F}_\kappa(y)^2}F_\kappa(x-\mathrm{d}y)=0.$$

Tétel (K)

Ha a föntiek teljesülnek

$$\lim_{x\to\infty} m(\log x)x^\kappa P\{X>x\}=C_\alpha\frac{1}{\kappa}E[(AX+B)_+^\kappa-(AX)_+^\kappa],$$

$$\lim_{x\to\infty} m(\log x)x^\kappa P\{X\le -x\}=C_\alpha\frac{1}{\kappa}E[(AX+B)_-^\kappa-(AX)_-^\kappa].$$

Továbbá, $E[(AX+B)_+^\kappa-(AX)_+^\kappa]+E[(AX+B)_-^\kappa-(AX)_-^\kappa]>0.$

Szükséges és elegendő feltétel?

$$P(X > x) \sim \ell(x)x^{-\kappa} \Rightarrow \; EA^{\kappa} = 1\,?$$

Ha $P(X > x) \sim \ell(x)x^{-\kappa}$ akkor $E|X|^p < \infty$ minden $p < \kappa$ esetén, és $E|X|^p = \infty$ minden $p > \kappa$ esetén.

Tétel (Alsmeyer & Iksanov & Rösler (2009))

$E|X|^p < \infty$ akkor és csak akkor, ha $EA^p < 1$ és $E|B|^p < \infty$.

Tehát, ha $P(X > x) \sim \ell(x)x^{-\kappa}$, akkor $EA^{\kappa} \leq 1$. Lehet-e < 1?

Tétel (K)

Igen.

Tétel (K)

Tfh $EA^\kappa = \theta < 1$, és F_κ szép szubexponenciális függvény. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} g(\log x)^{-1} x^\kappa P\{X > x\} = \frac{\theta}{(1-\theta)^2\kappa} E[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa],$$

$$\lim_{x\to\infty} g(\log x)^{-1} x^\kappa P\{X \leq -x\} = \frac{\theta}{(1-\theta)^2\kappa} E[(AX+B)_-^\kappa - (AX)_-^\kappa],$$

ahol $g(x) = F_\kappa(x+1) - F_\kappa(x)$. Továbbá,
$E[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa] + E[(AX+B)_-^\kappa - (AX)_-^\kappa] > 0$.
$g(\log x)$ lassú változású.

Feltételek

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B$$

$A \geq 0,\ EA^{\kappa} = 1$ valamilyen $\kappa > 0$ számra, $EA^{\kappa} \log_{+} A < \infty$, és $\log A$ feltéve, hogy $A \neq 0$, centrált rácsos h rácsállandóval.

$$\mathcal{Q}_{\kappa,h} = \Big\{ q : (0,\infty) \to [0,\infty) \ : x^{-\kappa} q(x) \text{ nemcsökkenő}, \\ q(xe^h) = q(x),\ \forall x > 0 \Big\}.$$

Tétel (Grincevičius)

Tfh $E|B|^\kappa < \infty$. Léteznek $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_{\kappa,h}$ függvények, hogy

$$\lim_{n\to\infty} x^\kappa e^{\kappa nh} P\{X > xe^{nh}\} = q_1(x), \quad x \in C_{q_1},$$
$$\lim_{n\to\infty} x^\kappa e^{\kappa nh} P\{X < -xe^{nh}\} = q_2(x), \quad x \in C_{q_2}.$$

$P(X > x) \sim x^\kappa q_1(x)$, ha q_1 folytonos.

Szentpétervári játék

Péter addig dobál egy szabályos érmét, amíg fejet nem kap. Ha ez a k-adik dobásra következik be, akkor 2^k dukátot fizet Pálnak.
$P\{X = 2^k\} = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. X (Pál nyereménye) eloszlásfüggvénye

$$P\{X \leq x\} = \begin{cases} 1 - \frac{2^{\{\log_2 x\}}}{x}, & x \geq 2, \\ 0, & x < 2, \end{cases}$$

$$P\{A=0, B=2^k\} = 2^{-2k},\ k=1,2,\ldots,$$
$$P\{A=2^\ell, B=0\} = 2^{-(2\ell+1)},\ \ell=0,1,\ldots.$$

Ekkor $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX+B$, ahol X szentpétervári változó.

$$\begin{aligned} P\{AX+B=2^k\} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} P\{A=2^\ell, B=0\}\, P\{X=2^{k-\ell}\} \\ &\quad + P\{A=0, B=2^k\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^{-(2\ell+1)}\, 2^{-(k-\ell)} + 2^{-2k} \\ &= 2^{-k-1}\, 2\,(1-2^{-k}) + 2^{-2k} = 2^{-k}. \end{aligned}$$

Ekkor $q(x) = 2^{\{\log_2 x\}}$.

Szentpétervári határeloszlás

$$\frac{\sum_{i=1}^{2^n} X_i}{2^n} - n \xrightarrow{\mathcal{D}} W.$$

Lévy (1935), Martin-Löf (1985), Csörgő (1990 – 2008)

Állítás (K)

Tetszőleges $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_{\kappa,h}$ *létezik olyan* (A, B) *pár, hogy a megfelelő perpetuitási egyenlet* X *megoldására*

$$\lim_{n\to\infty} x^\kappa e^{\kappa nh} P\{X > xe^{nh}\} = q_1(x), \quad x \in C_{q_1},$$
$$\lim_{n\to\infty} x^\kappa e^{\kappa nh} P\{X < -xe^{nh}\} = q_2(x), \quad x \in C_{q_2}.$$

KGG tétel

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B$$

Tétel (Kesten (1973), Grincevičius (1975), Goldie (1991))

Legyen $EA^\kappa = 1$, $EA^\kappa \log_+ A < \infty$, $\log A$ *nem centrált rácsos,* $E|B|^\kappa < \infty$. *Ekkor*

$$P\{X > x\} \sim c_+ x^{-\kappa} \text{ és } P\{X < -x\} \sim c_- x^{-\kappa} \text{ amint } x \to \infty.$$

Bizonyítás

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B,$$

$$P\{X > e^x\} = [P\{AX + B > e^x\} - P\{AX > e^x\}] + P\{AX > e^x\}$$

$\psi(x) = e^{\kappa x}(P\{AX+B > e^x\} - P\{AX > e^x\}),\ f(x) = e^{\kappa x}P\{X > e^x\}$

mivel X és A függetlenek

$f(x) = \psi(x) + A^\kappa e^{\kappa(x-\log A)}P\{X > e^{x-\log A}\} = \psi(x) + Ef(x-\log A)A^\kappa.$

Új mértéket bevezetve $P_\kappa\{\log A \in C\} = E[I(\log A \in C)A^\kappa]$

$$f(x) = \psi(x) + E_\kappa f(x - \log A).$$

Bizonyítás II

$$f(x) = \psi(x) + E_\kappa f(x - \log A).$$

Kapjuk, hogy

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) U(\mathrm{d}y),$$

ahol $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\kappa^{*n}(x)$ a felújítási függvény. Mivel $E_\kappa \log A < \infty$, a felújítási tételből következik, hogy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = m^{-1} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \mathrm{d}y,$$

ami éppen az állítás.