VEKTORTEREK I.

VEKTORTÉR, ALTÉR, GENERÁTORRENDSZER

2004. október 15.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
6. fejezet (Vektortér, altér, generálás);

további ajánlott irodalom:
Nincs.

További ajánlott feladatok

A VEKTORTÉR DEFINÍCIÓJA, PÉLDÁK.

1. Feladat. Igazolja, hogy a jegyzetben fölsorolt (6. fejezet, 6.2.) példákban szereplő struktúrák valóban vektorterek.

2. Feladat. Vektorteret alkotnak-e (a valós számok teste felett a szokásos műveletekkel) a következő halmazok?

(a) $\mathbb{R}^n$, azaz az összes valós szám n-esek;
(b) az összes $[0,1]$-en értelmezett valós függvények, (amelyek tehát a $[0,1]$ zárt intervallumot $\mathbb{R}$-be képezik le);
(c) az összes $\{0,1\}$-en értelmezett valós függvények, (amelyek tehát a $\{0,1\}$ halmazt $\mathbb{R}$-be képezik le);
(d) az összes $\mathbb{Z}$-n értelmezett valós függvények, (amelyek tehát az egész számok halmazát $\mathbb{R}$-be képezik le), jelölés: $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$;
(e) az összes $\mathbb{R}$-en értelmezett egész függvények, (amelyek tehát a valós számok halmazát $\mathbb{Z}$-be képezik le), jelölés: $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}\}$;
(f) $\{(a, b, c) \colon a, b, c \in \mathbb{Z}\}$, azaz az egész számhármasok halmaza;
(g) $\{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}^+\}$, azaz a pozitív valós számpárok halmaza;
(h) a valós együtthatós polinomok $\mathbb{R}[x]$ halmaza;
(i) adott $n \in \mathbb{N}$-nél nem nagyobb fokszámú valós együtthatós polinomok, halmazuk szokásos jelölése $\mathbb{R}_{n+1}[x]$.

Megoldás. Példaként megmutatjuk, hogy az $\mathbb{R}$-et $\mathbb{Z}$-be képező függvények (leképezések) halmaza nem alkot vektorteret a valós számtest felett.

Két ilyen leképezés összege is $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{Z}$-be menő leképezés, mivel az összeadás definíciója szerint $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, és ha $f(x)$ és $g(x)$ minden x-re egész szám, akkor az összegük is az.

Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor αf nem feltétlénül $\mathbb{Z}$-be képez, mivel a definíció szerint $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, ami biztosan nem egész, pl. ha α irracionális.

Így az $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{Z}$-be menő leképezések nem alkotnak vektorteret a valós számtest felett. Másrészt megmutatjuk, hogy a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok (halmazukat jelölje: $\mathbb{R}_4[x]$) vektorteret alkotnak a valós számtest felett a szokásos műveletekre:

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) = \\ = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$\alpha\,(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (\alpha a_3)x^3 + (\alpha a_2)x^2 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)\,.$$

A műveletek definíciója alapján látjuk, hogy

ha $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$, akkor $f+g$ egy egyértelműen meghatározott, legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinom, azaz $f + g \in \mathbb{R}_4[x]$;
ha $f \in \mathbb{R}_4[x]$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor αf is egy egyértelműen meghatározott, legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinom, azaz $\alpha f \in \mathbb{R}_4[x]$.

Tehát mind az összeadás, mind a skalárral való szorzás jól értelmezett ezen a halmazon. Ellenőrizzük sorra, teljesülnek-e erre a két műveletre a vektortér-axiómák:

(1) Az együtthatók valós számok, a valós számok összeadása kommutatív, így az $\mathbb{R}_4[x]$-beli összeadás is kommutatív.
(2) Hasonlóan adódik az $\mathbb{R}_4[x]$-beli összeadás asszociativitása is.
(3) A zéruspolinom $(0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0)$ valós együtthatós, legfeljebb harmadfokú, és bármely $f \in \mathbb{R}_4[x]$ polinomra $0 + f = f$, így tehát $\mathbb{R}_4[x]$-ben van egységelem az összeadásra vonatkozóan.
(4) Ha $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$, akkor a $g = (-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)$ polinom szintén valós együtthatós és legfeljebb harmadfokú, azaz $g \in \mathbb{R}_4[x]$, és nyilván $f + g = 0$; így minden $f \in \mathbb{R}_4[x]$-nek van additív inverze. (Ezt a polinomot általában $-f$-el szokás jelölni és az f ellentettjének is nevezzük.)
(5) Ha $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$, $g = ex^3 + hx^2 + ix + j \in \mathbb{R}_4[x]$, és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\alpha(f+g) &= \alpha\big((a+e)x^3 + (b+h)x^2 + (c+i)x + (d+j)\big) = \\ &= \alpha(a+e)x^3 + \alpha(b+h)x^2 + \alpha(c+i)x + \alpha(d+j) = \\ &= (\alpha a + \alpha e)x^3 + (\alpha b + \alpha h)x^2 + (\alpha c + \alpha i)x + (\alpha d + \alpha j) = \\ &= (\alpha a x^3 + \alpha b x^2 + \alpha c x + \alpha d) + (\alpha e x^3 + \alpha h x^2 + \alpha i x + \alpha j) = \\ &= \alpha f + \alpha g.\end{aligned}$$

(6) Ha $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$, és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)f &= (\alpha+\beta)ax^3 + (\alpha+\beta)bx^2 + (\alpha+\beta)cx + (\alpha+\beta)d = \\ &= (\alpha a + \beta a)x^3 + (\alpha b + \beta b)x^2 + (\alpha c + \beta c)x + (\alpha d + \beta d) = \\ &= (\alpha a x^3 + \alpha b x^2 + \alpha c x + \alpha d) + (\beta a x^3 + \beta b x^2 + \beta c x + \beta d) = \\ &= \alpha f + \beta f\,.\end{aligned}$$

(7) Ha $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$, és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)f &= (\alpha\beta)ax^3 + (\alpha\beta)bx^2 + (\alpha\beta)cx + (\alpha\beta)d = \\ &= \alpha(\beta a)x^3 + \alpha(\beta b)x^2 + \alpha(\beta c)x + \alpha(\beta d) = \\ &= \alpha((\beta ax^3 + \beta bx^2 + \beta cx + \beta d)) = \\ &= \alpha(\beta f)\,.\end{aligned}$$

(8) Ha $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$, akkor

$$1f = (1\cdot a)x^3 + (1\cdot b)x^2 + (1\cdot c)x + 1\cdot d = ax^3 + bx^2 + cx + d = f\,.$$

Vagyis minden axióma teljesül, $\mathbb{R}_4[x]$ tehát vektortér $\mathbb{R}$ fölött.

3. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a valós számpárok halmaza vektorteret alkot-e a valós számok teste felett, ha a műveleteket a következőképpen definiáljuk:

(a) $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ és $\alpha(a, b) := (\alpha a, b)$;
(b) $(a, b) + (c, d) := (3b + 3d, -a - c)$ és $\alpha(a, b) := (3\alpha b, -\alpha a)$;
(c) $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ és $\alpha(a, b) := (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$;
(d) $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ és $\alpha(a, b) := (\alpha a, 0)$.

4. Feladat. A pozitív valós számok $\mathbb{R}^+$ halmazában a $\oplus$ „összeadás” legyen a következő: $a \oplus b = ab$, a λ valós számmal való $\odot$ „szorzást” pedig a következőképpen definiáljuk: $\lambda \odot a = a^\lambda$. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^+$ halmaz az így definiált műveletekkel vektortér a valós számok teste felett.

5. Feladat. Legyen V vektortér a T test felett. Melyek igazak az alábbi állítások közül ($u, v \in V,\ \lambda, \mu \in T$):

(a) Ha $v \neq 0$ és $\lambda v = \mu v$, akkor $\lambda = \mu$.
(b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda v = \lambda u$, akkor $v = u$.
(c) Ha $v \neq 0, u \neq 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0$ és $\lambda u = \mu v$, akkor $u = v$ és $\lambda = \mu$.

* * * * * * * * * *

ALTEREK.

6. Feladat. Legyen V vektortér a T test felett. Igazolja, hogy a V egy nemüres U részhalmaza pontosan akkor altere V-nek, ha bármely $u, v \in U$ és bármely $\lambda, \mu \in T$ esetén $\lambda u + \mu v \in U$.

7. Feladat. A V valós vektortér U részhalmazára nézve az alábbi feltételek melyike ekvivalens azzal, hogy U altér V-ben:

(a) $(\forall x, y \in U)(\forall a \in \mathbb{R}):\quad ax + y \in U$;
(b) $(\forall x, y \in U)(\forall a \in \mathbb{R}):\quad ax + ay \in U$;
(c) $(\forall x, y \in U)(\forall a \in \mathbb{R}):\quad ax - ay \in U$.

8. Feladat. Állapítsa meg, hogy a valós számhármasok következő részhalmazai közül melyek alkotnak alteret az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 = 0\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_2 = 0\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 = x_2 = 0\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 + x_2 = 0\}$;
(f) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 + x_2 = 1\}$;
(g) $U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 + x_2 \geq 0\}$.

Megoldás. Alkalmazzuk az alábbi tételt (ld. a jegyzetben, 6.7. Tétel 2. állítása)
Ha V vektortér a T számtest felett, akkor V valamely U nem üres részhalmaza akkor, és csak akkor altér, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, azaz bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén $u + v,\ \lambda u \in U$.
Példaként megvizsgáljuk az (f)-beli U részhalmazt:
1. Megoldás: Legyen $u = (1, 0, 0) \in U$ és $v = (0, 1, 0) \in U$, ekkor $u + v = (1, 1, 0)$, ahol $x_1 + x_2 = 2$, tehát $u + v \notin U$, azaz U nem zárt az összeadásra, ezért a tétel alapján U nem altér $\mathbb{R}^3$-ban.
2. Megoldás: Tudjuk, hogy minden altér tartalmazza a vektortér zérusvektorát (ld. 6.7.1.). Mivel $\underline{0} = (0, 0, 0)$ az $\mathbb{R}^3$ nullvektora és $\underline{0} = (0, 0, 0) \notin U$, ezért U nem lehet altér $\mathbb{R}^3$-ban.

9. Feladat. Határozza meg, hogy $\mathbb{R}^4$ következő részhalmazai közül melyek alterek:

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 = x_2,\ x_3 = x_4\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ 2x_1 - 3x_2 = 1\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1^2 + x_2^2 = 0\}$;
(f) $U = \{(a + 2b, a, 2a - b, b)\colon\ a, b \in \mathbb{R}\}$;
(g) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(h) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 x_4 = x_2 x_3\}$;

Megoldás. Példaként megvizsgáljuk a (c)-beli U részhalmazt:
Legyen $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U,\ v = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in U$, azaz olyan számnégyesek melyre $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, valamint $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$ teljesül.
Ekkor $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$, és

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_3 + x_4) + (y_3 + y_4) = (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$$

ami azt jelenti, hogy $u + v \in U$ teljesül. U tehát zárt az összeadásra.
Legyen $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, tehát $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Ekkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$, és mivel

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_3 + x_4) = \lambda x_3 + \lambda x_4\,,$$

ezért $\lambda u \in U$, vagyis U a skalárral való szorzásra is zárt.
Az előző feladat megoldásában már idézett tétel alapján U altér $\mathbb{R}^4$-ben.

10. Feladat. Legyen V vektortér a T test fölött és U a V egy nemtriviális altere. Melyek igazak az alábbi állítások közül ($u, v \in V, \lambda, \mu \in T$):

(1) ha $u + v \in U$, akkor $u, v \in U$;
(2) ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda v \in U$, akkor $v \in U$;
(3) ha $u \in U,\ v \notin U$, akkor $u + v \notin U$;
(4) ha $u \notin U,\ v \notin U$, akkor $u + v \notin U$;
(5) ha $u \notin U,\ v \notin U$, akkor $u + v \in U$.

11. Feladat. A valós számtest fölötti $n \times n$-es mátrixok vektorterében mely részhalmazok alkotnak alteret:

(1) az $n \times n$-es alsó trianguláris mátrixok halmaza;
(2) az $n \times n$-es szimmetrikus mátrixok halmaza;
(3) az $n \times n$-es nemelfajuló mátrixok halmaza;
(4) az $n \times n$-es elfajuló mátrixok halmaza;
(5) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}\colon\ A^2 = 0\}$;
(6) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}\colon\ AB = 0\}$, ahol $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy rögzített mátrix;
(7) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}\colon\ AB = BA\}$, ahol $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy rögzített mátrix;

12. Feladat. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^n$-ben azon $(x_1, \ldots, x_n)$ vektorok részhalmaza, melyekre:

(a) $x_i = 0$ valamely $1 \leq i \leq n$-re;
(b) $x_1 + 2x_2 = 0$;
(c) $x_1 = x_n$;
(d) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad (a \in \mathbb{R})$;
(e) $x_i \in \mathbb{Z}$, minden $i \in \{1, 2, \ldots n\}$-re;
(f) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0$;
(g) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$;
(h) az összes olyan valós szám n-esek, amelyeknek minden „páratlanadik” komponense zérus (azaz $x_1 = x_3 = \ldots = 0$);
(i) $x_1 = x_3 = \ldots$, azaz az összes olyan valós szám n-esek, amelyeknek minden „páratlanadik” komponense egyenlő;

13. Feladat. Adjunk példát olyan vektortérre és abban olyan részhalmazra, amely

(a) az összeadásra zárt, de a skalárral való szorzásra nem;
(b) az összeadásra nem zárt, de a skalárral való szorzásra igen;
(c) sem az összeadásra, sem a skalárral való szorzásra nem zárt.

14. Feladat. Geometriai vektorok terében:

(1) az összes térbeli vektorok terében azon vektorok halmaza, melyek végpontjai egy egyenesen vannak;
(2) az összes síkbeli vektorok terében azon vektorok halmaza, amelyek az első síknegyedben vannak;
(3) az összes térbeli vektorok, amelyek végpontja egy adott síkban van;
(4) az összes síkbeli vektorok, amelyek végpontja az első síknegyedben van;
(5) az összes síkbeli vektorok, amelyek végpontja az első vagy a harmadik síknegyedben van;
(6) az összes térbeli vektorok, amelyek végpontja az első térnyolcadban van;

15. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^2$ vektortérben minden nemtriviális altér

$$\{(x,y) : \alpha x + \beta y = 0\}$$

alakú valamely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárokra.

16. Feladat. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}[x]$-ben azon $p(x)$ polinomok, melyekre:
(a) $p(x)$ foka 3 ;
(b) $p(x)$ konstans tagja nulla ;
(c) $p(x)$ foka kisebb, mint 3 és a zéruspolinom;
(d) $p(x)$ foka páros és a zéruspolinom.

17. Feladat. Döntse el, hogy a valós számsorozatok $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorterében az alábbi részhalmazok alteret alkotnak-e (egy általános sorozatot $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ formában jelölünk):
(1) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_1 = 2a_3 + a_5\}$;
(2) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_1 = 2a_3a_5\}$;
(3) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ \text{minden } n = 2, 3, \dots\}$, azaz a harmadik tagtól kezdve a sorozat minden tagja a megelőző két tag összege;
(4) a (végtelen) számtani sorozatok;
(5) a (végtelen) mértani sorozatok, megengedve a csupa 0 sorozatot is;
(6) a monoton sorozatok;
(7) a korlátos sorozatok;
(8) a konvergens sorozatok;
(9) a 0-ba konvergáló sorozatok;
(10) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_i = 0$ végtelen sok i-re$\}$;
(11) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_i = 0$ legfeljebb véges sok i kivételével$\}$;
(12) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_i = 0$ legfeljebb 100 darab i kivételével$\}$;
(13) $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon\ a_i = 0$ legfeljebb az első 100 darab i kivételével$\}$;

18. Feladat. Alteret alkotnak-e az adott függvényhalmazok az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektortérben:
(1) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ f(1) \in \mathbb{Q}\}$;
(2) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ f(1) = f(2)\}$;
(3) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ f(1) = f(2) = 0\}$;
(4) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ f(1) \geq 0 \text{ és } f(2) \leq 0\}$;
(5) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ f(1) \geq 0 \text{ vagy } f(2) \leq 0\}$;
(6) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ 3f(0) = 2f(1)\}$;
(7) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \colon\ f(2) = f(1) + 1\}$;
(8) a konstans, azaz az $f(x) = a$ $(a \in \mathbb{R})$ alakú függvények halmaza;
(9) a felülről korlátos függvények;
(10) a páros függvények;
(11) a folytonos függvények;
(12) a legfeljebb öt pontban szakadó függvények;
(13) a legfeljebb véges sok pontban szakadó függvények;
(14) az összes olyan függvény halmaza, melynek van valós zérushelye;

19. Feladat. Mutassa meg, hogy ha S és T a V vektortér olyan alterei, melyekre $S \cap T = \{0\}$, akkor az $S + T$ összeg-altér minden eleme *egyféleképpen* írható $s + t,\ s \in S,\ t \in T$ alakba. Mutassunk rá egy (ellen)példával, hogy ez az állítás nem igaz, ha $S \cap T \neq \{0\}$.

* * * * * * * * * *

GENERÁLÁS.

20. Feladat. Tekintsük a valós számhármasok vektorterében az $a = (1, -3, 2)$ és a $b = (2, -2, 4)$ vektorok által generált alteret.

(a) Eleme-e ennek az altérnek a $c = (5, -3, 10)$ vektor?
(b) Adjon meg egy olyan valós számhármast, amely nem eleme az a és b által generált altérnek.

21. Feladat. Igazolja, hogy az $\{(0, a, b)\colon\ a, b \in \mathbb{R}\}$ részhalmaz altere az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. Mutassa meg, hogy ezt az alteret generálja a $\{(0, 1, 2), (0, -1, 1)\}$ vektorrendszer.

22. Feladat. Generátorrendszere-e az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortérnek az

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

halmaz?

23. Feladat. Határozza meg az

(a) $(0, 1, 0)$;
(b) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$;
(c) $(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)$;
(d) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$;

vektorok által kifeszített alteret $\mathbb{R}^3$-ban.

24. Feladat. Mutassa meg, hogy az alábbi két-két vektor ugyanazt az alteret feszíti ki $\mathbb{R}^3$-ban:

$$a = (1, 1, 0),\ b = (0, 0, 1) \quad \text{illetve} \quad c = (1, 1, 1),\ d = (-1, -1, 1)\,.$$

Megoldás. Legyen $A = [a, b]$, az a és b vektorok által generált (=kifeszített), $C = [c, d]$ pedig a c és d által generált altér. A generátum tulajdonságai (6.10. Tétel) alapján $a, b \in A$ és $c, d \in C$, ezért $A = C$-nek nyilvánvaló szükséges feltétele, hogy a, b benne legyen C-ben, c, d pedig benne legyen A-ban. Ezt fogjuk megmutatni, majd belátjuk, hogy ez elegendő is.
Mivel C a c, d vektorok összes (valós együtthatós) lineáris kombinációjából áll, azaz $C = \{\gamma c + \delta d\colon\ \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$, ezért az $a \in C$ igazolásához elő kell állítani az a vektort c és d lineáris kombinációjaként. Keressünk olyan $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárokat, hogy $a = \gamma c + \delta d$ legyen! Azaz meg kell oldani a következő egyenletet:

$$(1, 1, 0) = \gamma(1, 1, 1) + \delta(-1, -1, 1) = (\gamma - \delta, \gamma - \delta, \gamma + \delta). \tag{1}$$

Két valós számpár pontosan akkor egyenlő, ha komponensenként egyenlők, ezért (1) a következő (egyszerű) egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\gamma - \delta = 1, \qquad \gamma - \delta = 1, \qquad \gamma + \delta = 0\,.$$

Ennek egyetlen megoldása $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = -\frac{1}{2}$. Tehát a valóban előáll c, d lineáris kombinációjaként: $a = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$, és így $a \in [c, d]$.

Feladat: Hasonlóan igazoljuk, hogy $b \in C$, $c \in A$, és $d \in A$.

Ez viszont elegendő is, mert ha $a, b \in C$, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárok esetén $\alpha a + \beta b \in C$, hiszen C altér (ld. 6.10. Tétel), és így zárt a műveletekre. Ez viszont azt jelenti, hogy a, b *minden* lineáris kombinációja, másszóval A *minden* eleme C-ben van, vagyis $A \subseteq C$.
Hasonlóan, abból, hogy $c, d \in A$, kapjuk, hogy $C \subseteq A$, így a két altér valóban egyenlő.

Megjegyzés. Általában is belátható, hogy ha valamely V vektortér két altere kölcsönösen tartalmazza a másik valamely generátorrendszerét, akkor azok megegyeznek. Ha ugyanis $X \subseteq [Y]$ (azaz X benne van az $[Y]$ *altérben*), akkor $[X] \subseteq [Y]$, mert $[X]$ a *legszűkebb* X*-et tartalmazó altere* V*-nek*; ld. 6.10. Tétel. Hasonlóan, ha $Y \subseteq [X]$, akkor $[Y] \subseteq [X]$, és így $[X] = [Y]$.

25. Feladat. Milyen feltételeket kell az a, b és c valós számoknak kielégíteni, hogy az $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektor az $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$ és $w = (0, 3, -4)$ vektorok által generált altérhez tartozzon?

26. Feladat. Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben legyen S a $(0, x_1, x_2)$ alakú vektorok altere, T pedig az $(1, 1, 1)$ és $(2, 3, 0)$ vektorokkal generált altér. Határozza meg az $S \cap T$ alteret.

27. Feladat. Az $\mathbb{R}^4$ vektortérben legyen

$$A = \big[(1, 0, -1, 2),\ (-1, 2, 2, 0)\big] \qquad B = \big[(1, 3, -2, 0),\ (2, 4, -5, -2)\big]$$

Határozza meg az $A \cap B$ és $A + B$ altereket.

28. Feladat. Legyen V tetszőleges valós vektortér és tegyük fel, hogy $b_1, b_2 \in V$ lineárisan független vektorok. Igazolja, hogy az $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ és $a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$ $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R})$ vektorok által kifeszített altér pontosan akkor egyezik meg a $\{b_1, b_2\}$ által kifeszített altérrel, ha $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

29. Feladat. Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben tekintsük az

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0\}$$
$$T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n\}$$

részhalmazokat. Igazolja, hogy:

(a) S és T alterek;
(b) $S \cap T = \{0\}$;
(c) $S + T = \mathbb{R}^n$.