INVERZ MÁTRIX

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
4. fejezet (Inverzmátrix);

további ajánlott irodalom:

D. K. Fagyejev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;
4. fejezet, 480. a) - h), 481. a) - d), f) - g) 482. feladat

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;
A Mátrixok c. fejezetben (a 171. oldaltól): 1., 2., 4.-5., 16., 21.-22., 30. feladat

Példák

1. Példa. Határozza meg az alábbi mátrix inverzét (amennyiben létezik):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Jelöljük A-val a szóban forgó mátrixot. Először kiszámítjuk a determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0\,.$$

Ez a 4.2. Tétel szerint azt jelenti, hogy A-nak van inverze.
Az inverz meghatározásához kiszámítjuk az adjungált aldeterminánsokat (emlékeztetőül: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}\,,\ 1 \le i, j \le 3$):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Ezekből már fölépíthetjük az A inverzét (ügyeljünk a sor- és oszlopindexekre!):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Ellenőrzésképpen:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \,.$$

További ajánlott feladatok

1. Feladat. Határozza meg a következő mátrixok inverzét (amennyiben létezik):

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 21 & 17 & 13 & 44 \\ 0 & 63 & -83 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Feladat. Oldja meg a következő mátrixegyenleteket:

(a)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$$

(e)
$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 7 \\ 12 & 30 & 13 \\ 8 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

(f)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oldja meg az alábbi mátrixegyenletek közül a megoldhatókat:

(a) $AX = B$ (b) $XA^{-1} = B$ (c) $B + X = A^2$

4. Feladat. Legyenek A, B, C adott, X pedig ismeretlen, azonos méretű négyzetes és nemelfajuló mátrixok. Oldja meg az alábbi „mátrix-egyenleteket” (azaz a műveletek ismert-tanult tulajdonságai alapján fejezzük ki az X mátrixot az összefüggésből):

(a)
$$AX^{-1}B - C = AX^{-1};$$

(b)
$$(AX)^{-1} + X^{-1} = B;$$

Adja meg a megoldásokat, abban az esetben, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Feladat. Igazolja az alábbi, négyzetes mátrixokra vonatkozó állításokat:

(1) Ha AB nemelfajuló, akkor A és B szintén nemelfajuló.
(2) Ha az A valamely pozitív egész kitevős hatványa a nullmátrix, akkor A elfajuló.
(3) Ha az A nemelfajuló, akkor bármely pozitív egész kitevős hatványa is nemelfajuló; továbbá
$$(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n.$$