9. feladatsor

1. Feladat. Határozzuk meg, hogy a megadott G csoport, N normálosztója és H részcsoportja esetén mely csoportok izomorfiáját állítja az 1. izomorfiatétel. A két csoportot elemeikkel adjuk meg.

a) $G = \mathbf{Z}_{12}, \quad N = [\overline{6}], \quad H = [\overline{4}]$,
b) $G = D_4, \quad N = [\varphi], \quad H = [\tau]$,
c) $G = S_6, \quad N = A_6, \quad H = [(123)]$.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A Abel-csoport esetén A endomorfizmusainak (azaz önmagába menő homomorfizmusainak) halmaza a következő összeadásra és a szokásos leképezésszorzásra nézve gyűrűt alkot:

$$g(\varphi + \psi) = g\varphi + g\psi$$

3. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott R gyűrűben az I halmaz részgyűrűt, illetve ideált alkot-e. Ha ideált alkot, akkor vizsgáljuk meg, hogy az ideál főideál-e, valamint adjuk meg az R/I faktorgyűrű elemeit és műveleteit (művelettáblázattal vagy más módon).

a) $R = \mathbf{Z}$, I pedig a páratlan egész számok halmaza,
b) $R = \mathbf{Z}$, I pedig a pozitív egész számok halmaza,
c) $R = \mathbf{Z}[i]$, $I = \mathbf{Z}$,
d) $R = \mathbf{Z}[i]$, $I = \{a + bi : a, b \in 2\mathbf{Z}\}$,
e) $R = \mathbf{Z}[x]$, $I = \{f \in \mathbf{Z}[x] : f(1) = 0\}$,
f) $R = \mathbf{Z}[x]$, $I = \{f \in \mathbf{Z}[x] : f(0) = 1\}$,
g) $R = \mathbf{Z}[x]$, $I = \{f \in \mathbf{Z}[x] : f(0) \neq 1\}$,
h) $R = \mathbf{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x] : 2 \mid a_1\}$,
i) $R = \mathbf{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x] : 3 \mid a_0\}$.

Szorgalmi feladatok

4. Feladat. Legyen R olyan kommutatív, egységelemes gyűrű, melyben az egységelem additív rendje 2. Igazoljuk, hogy ekkor bármely $a, b \in R$ esetén

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2.$$

5. Feladat. Megadható-e a $\mathbf{Z}$ gyűrűben olyan részhalmaz, amely zárt az összeadásra és a kivonásra, azonban a szorzásra nem?

6. Feladat. Legyen R a 2×2-es felső trianguláris valós mátrixok halmaza, T pedig az alsó triangulárisoké. Igazoljuk, hogy R és T részgyűrűje $\mathbf{R}^{2\times 2}$-nek. Igazoljuk, hogy ez a két részgyűrű anti-izomorf, azaz létezik olyan $\varphi\colon R \to T$ bijekció, amelyre bármely $A, B \in R$ esetén $(A + B)\varphi = A\varphi + B\varphi$, valamint $(AB)\varphi = B\varphi \cdot A\varphi$. Izomorf-e R és T?