8. feladatsor

1. Feladat. Döntsük el az alábbi leképezésekről, hogy homomorfizmusok-e.

a) $\varphi\colon S_n \mapsto S_n, \pi \mapsto (1\ 2)\pi$,
b) $\varphi\colon S_n \mapsto S_n, \pi \mapsto (1\ 2)\pi(1\ 2)$,
c) $\varphi\colon \mathbf{Z}_{15} \to \mathbf{Z}_6, \overline{n} \mapsto \overline{n}$,
d) $\varphi\colon \mathbf{Z}_{15} \to \mathbf{Z}_6, \overline{n} \mapsto \overline{2n}$.

A fenti leképezések közül határozzuk meg a homomorfizmusok magját.

2. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi csoportok izomorfak-e egymással.

a) R_6 és R_4,
b) R_{15} és $\mathbf{Z}_8$,
c) D_4 és Q,
d) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbf{C}^*$,
e) a kör forgatáscsoportja és az 1 abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja.

3. Feladat. Határozzuk meg a megadott G csoport H részcsoportja szerinti jobb- illetve bal oldali mellékosztályozást, és döntsük el, hogy H normálosztó-e.

a) $G = D_4,\ H = [\tau]$,
b) $G = D_6,\ H = [\mathrm{id}, \varphi^3]$,
c) $G = C_n = [a],\ H = [a^d]$, ahol $n \in \mathbf{N}, d \mid n$,
d) $G = S_4,\ H = V$,
e) $G = S_4,\ H$ pedig az $\{1, 2\}$ halmazt önmagába képező permutációk részcsoportja.

4. Feladat. Határozzuk meg a G csoport A részhalmaza által generált normálosztóját.

a) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2)(3\ 4)\}$,
b) $G = D_6,\ A = \{\varphi\}$,
c) $G = D_6,\ A = \{\tau\}$,
d) $G = Q,\ A = \{i\}$.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy a G csoportban megadott H részcsoport normálosztó, valamint adjuk meg a G/H faktorcsoport elemeit. Milyen ismert csoporttal izomorf G/H?

a) $G = S_7,\ H = A_7$,
b) $G = S_4,\ H = V$,
c) $G = R_{15},\ H = \{\overline{1}, \overline{14}\}$,
d) $G = \mathbf{Q}^*,\ H = \{1, -1\}$,
e) $G = \mathbf{Q},\ H = \mathbf{Z}$.

Szorgalmi feladatok

6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $H, K \leq G$ olyan véges részcsoportok, amelyek rendje egymáshoz relatív prím, akkor $H \cap K = \{1\}$.

7. Feladat. Döntsük el, hogy létezik-e

a) $\mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_{12}$,
b) $\mathbf{Z}_{21} \to \mathbf{Z}_{14}$,

c) $V \to \mathbf{Z}_4$,
d) $D_4 \to S_4$

nemtriviális, szürjektív, illetve injektív homomorfizmus.

8. Feladat. Döntsük el, hogy a $(\mathbf{Z}[x];+)$ és $(\mathbf{Q}^+;\cdot)$ csoportok izomorfak-e.

9. Feladat. Milyen $m, n \geq 3$ egészekre tartalmaz S_m a $\mathbf{Z}_n$, illetve D_n csoporttal izomorf részcsoportot?

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha H, K részcsoportja a G véges csoportnak, akkor $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a G csoport K részhalmaza valamely részcsoport szerinti bal oldali mellékosztály, akkor G-nek van olyan részcsoportja, amely szerint K jobb oldali mellékosztály.

12. Feladat. Keressük meg a D_n csoport összes normálosztóját.

13. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha H, K normálosztó G-ben és $H \cap K = \{1\}$, akkor $hk = kh$ bármely $h \in H$ és $k \in K$ esetén.

14. Feladat. Adjunk példát olyan G csoportra, és annak olyan H, K részcsoportjára, amelyekre HK nem részcsoportja G-nek. Igazoljuk, hogy ha N normálosztója, K pedig részcsoportja G-nek, akkor $NK \leq G$.