

7. Feladatsor

1. Feladat. Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

- a) (\mathbf{Z}_2, \cdot) ,
- b) $(\mathbf{Z}_2, +)$,
- c) (S_3, \cdot) ,
- d) $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, ahol $x \circ y = x/y$,
- e) $(P(H), \cup)$,
- f) $(P(H), \Delta)$.

2. Feladat. Határozzuk meg a megadott elemek rendjét a megadott csoportban.

- a) $G = S_6$, $(1\ 2\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)^{-1}$,
- b) $G = \mathbf{Z}_{12}$, $\overline{5}, \overline{9}, \overline{11}$,
- c) $G = \{\epsilon \in \mathbf{C} : \epsilon^{12} = 1\}$, $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$, $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$, $\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}$,
- d) $G = R_{18}$, $\overline{5}, \overline{7}$,
- e) $G = \mathbf{Q}$, $\frac{5}{9}$.

3. Feladat. Határozzuk meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját.

- a) $G = S_4$, $A = \{(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4)\}$,
- b) $G = \mathbf{Z}_{18}$, $A = \{\overline{14}\}$,
- c) $G = \{\epsilon : \epsilon^{18} = 1\}$, $A = \{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\}$,
- d) $G = \mathbf{Z}_{30}$, $A = \{\overline{6}, \overline{15}\}$,
- e) $G = \mathbf{Q}$, $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$.

4. Feladat. Mely csoportok ciklikusak az alábbiak közül?

- a) S_3 ,
- b) A_3 ,
- c) R_{18} .

Szorgalmi feladatok

5. Feladat. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát:

- a) Minden páros rendű permutáció páros.
- b) Minden páros permutáció rendje páros.
- c) Minden páratlan rendű permutáció páros.
- d) Minden páratlan permutáció páros rendű.

6. Feladat. Milyen elemrendek fordulnak elő az S_6, S_8 , illetve S_{11} csoportokban?

7. Feladat. Igazoljuk, hogy egy G csoport tetszőleges a, b, x, y elemére

- a) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$,
- b) $a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = b$,
- c) $axb = ayb \Rightarrow x = y$.

8. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in G$, akkor

- a) $o(a) = o(b^{-1}ab)$,
- b) $o(ab) = o(ba)$,
- c) $o(a^k) = \frac{o(a)}{\text{Inko}(k, o(a))}$.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.