

5. feladatsor

1. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan \mathbf{Q} fölötti Jordan-mátrixot, amely

- a) 4×4 -es és minimálpolinomja $(x + 1)^2$,
- b) 6×6 -os és minimálpolinomja $(x + 2)^2(x - 1)$,
- c) 7×7 -es és minimálpolinomja $(x + 1)^2(x - 3)$,
- d) 6×6 -os és karakterisztikus polinomja $(x^4 - 1)(x^2 - 1)$.

2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-normálalakját a \mathbf{Q} , \mathbf{R} , illetve \mathbf{C} testek felett.

- a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$
- b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$
- c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Feladat. Lehetnek-e egy valós mátrix invariáns faktorai a következők? Ha igen, adjuk meg Jordan-normálalakját.

- a) $1, 1, 1, (x - 2)^2, (x - 1)(x^2 + x + 1)$,
- b) $1, 1, (x - 2), (x - 2)(x - 1)$,
- c) $1, 1, (x - 1), (x - 1)(x^2 + 2x - 2)$,
- d) $1, (x - 3), (x - 3)^3, (x - 3)^3(x^2 + x + 1)$,
- e) $1, 1, 1, 1, (x - \sqrt{2}), (x - \sqrt{2})^2, (x - \sqrt{2})^2(x^2 - x + 10)$.

Szorgalmi feladatok

4. Feladat. Adjunk meg olyan P invertálható valós mátrixot, amelyre a

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} P$$

mátrix Jordan-normálalakú (természetesen az \mathbf{R} test felett).

5. Feladat. Adjunk meg olyan P invertálható racionális mátrixot, amelyre a

$$P^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} P$$

mátrix Jordan-normálalakú (természetesen a \mathbf{Q} test felett).

6. Feladat. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy mátrixnak invariáns faktora legyen az 1 polinom?

7. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \times n$ -es mátrix karakterisztikus polinomja osztja a minimálpolinomja n -ik hatványát.