4. feladatsor

1. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban A. Adjunk meg az $\mathbf{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Feladat. Adjunk meg olyan D ortogonális mátrixot, amelyre a $D^{-1}AD$ mátrix diagonális, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Feladat. Hajtsunk végre főtengelytranszformációt az alábbi kvadratikus alakon:

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

4. Feladat. Legyen az $\mathbf{R}^n$ euklideszi tér φ lineáris transzformációjának mátrixa A a kanonikus bázisban. Adjunk meg bázist a v vektor által generált invariáns altérben.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad v = (1, 2, -1)$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ -7 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad v = (1, 1, -1, 0)$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = (1, 2, 0, -1)$.

Szorgalmi feladatok

5. Feladat. Igazoljuk, hogy egy ortogonális transzformáció karakterisztikus polinomjának minden valós gyöke 1 abszolút értékű.

6. Feladat. Adjunk példát olyan ortogonális transzformációra, amelynek nincs valós sajátértéke.

7. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $A \in \mathbf{R}_{3\times 3}$ ortogonális mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbf{R}_{3\times 3}$ és $B \in \mathbf{R}_{2\times 2}$ ortogonális mátrix, amelyre

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A lehetséges B mátrixok meghatározása után fogalmazzuk meg a fenti állítás geometriai jelentését.

8. Feladat. Legyen $\varphi, \psi \in L(V)$ lineáris transzformációk. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Amennyiben igazak, igazoljuk őket, amennyiben nem, adjunk rájuk ellenpéldát.

- Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi + \psi$ is.
- Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi\psi$ is.
- Ha φ ortogonális, de ψ nem, akkor $\varphi\psi$ sem ortogonális.

9. Feladat. Adjunk meg olyan $\varphi\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineáris transzfromációt (mátrixával), amelyre a $v = (1, -1, 1, 0)$ vektor által generált invariáns altér 3 dimenziós.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $v \in V$ és $\varphi \in L(V)$, akkor az

$$\{u \in \langle v \rangle : u\varphi = u\}$$

altér legfeljebb 1 dimenziós.

11. Feladat. Adjunk példát olyan φ lineáris transzfromációra, és olyan v vektora, amelyre nézve a fenti altér 1 dimenziós, illetve olyanra, amelyre nézve 0 dimenziós.