2. feladatsor

1. Feladat. Direkt összege-e az $\mathbf{R}^4$ vektortér az U_1 és U_2 altereinek?

- $U_1 = [(1,2,1,1),(0,1,2,3)]$ és $U_2 = [(1,2,2,3),(0,1,3,5),(0,0,1,2)]$,
- $U_1 = [(1,1,2,2),(1,2,1,2)]$ és $U_2 = [(2,1,2,1),(1,2,2,2)]$,
- $U_1 = [(1,-1,2,1),(1,2,0,-2)]$ és $U_2 = [(1,1,-1,1),(2,1,2,-1)]$,
- $U_1 = [(1,1,-1,2),(1,-1,1,0),(2,0,0,2)]$ és $U_2 = [(1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,3,-3,4)]$.

2. Feladat. Tudjuk, hogy a $\mathbf{R}^4$ vektortér az alábbi két alterének direkt összege:

$$U_1 = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)], U_2 = [(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)]$$

Állítsuk elő a $v = (3,3,2,0)$ vektort egy U_1-beli és egy U_2-beli vektor összegeként (tudjuk, hogy ez az előállítás egyértelmű).

3. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Scmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független vektorrendszereken!

a) $(1,0,0),(2,3,0),(1,6,1)$,
b) $(1,6,1),(1,0,0),(2,3,0)$,
c) $(1,1,-1,1),(2,1,-1,0),(2,-1,3,2)$.

4. Feladat. Adjunk meg (ortogonális) bázist az alábbi alterek ortogonális kiegészítőjében.

- $[(1,1,-1),(1,2,1)]$,
- $[(1,-1,1,1),(1,2,-1,1),(2,1,0,2)]$,
- $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

Szorgalmi feladatok

5. Feladat. Direkt összege-e az $\mathbf{R}^4$ vektortér az U_1 és U_2 altereinek?

- $U_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 2x_3 - x_4 = 0\}$ és $U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\}$,
- $U_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$ és $U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$.

6. Feladat. Adjuk meg az $\mathbf{R}^4$ vektortér U_1, U_2 és U_3 alterét úgy, hogy

- $\mathbf{R}^4 = U_1 + U_2 + U_3$ legyen,
- az U_1, U_2, U_3 alterekre bármely kettő metszete triviális legyen,
- $\mathbf{R}^4$ ne legyen az U_1, U_2, U_3 alterek direkt összege.

7. Feladat. Egészítsük ki az $(1,-1,1,1)$ vektorrendszert olyan ortogonális rendszerré, melyben minden koordináta egész szám (minél egyszerűbben).

8. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden, legalább két dimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van.

9. Feladat. Adjunk meg $\mathbf{R}^2$-ben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely kettő lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.

Legyen V egy n-dimenziós euklideszi tér. Adjunk meg V-ben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely n lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.