

10. feladatsor

1. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott L test, és ezen test feletti f polinom esetén $L[x]/(f)$ testet alkot-e. Ha igen, határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

- a) $L = \mathbf{Z}_2$, $f = x^2 + x + 1$,
- b) $L = \mathbf{Z}_2$, $f = x^2 + 1$,
- c) $L = \mathbf{Z}_3$, $f = x^2 + 1$,
- d) $L = \mathbf{Z}_3$, $f = x^3 + 2x^2 + 2$,
- e) $L = \mathbf{Z}_3$, $f = x^3 + 2x + 1$,
- f) $L = \mathbf{Z}_2$, $f = x^4 + x^3 + 1$,
- g) $L = \mathbf{Z}_2$, $f = x^4 + x^2 + 1$.

2. Feladat. Adjuk meg a $\mathbf{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + 2)$ test alábbi elemeit:

$$\overline{x+2} + \overline{x^2+2x+1}, \quad \overline{x^2+2x+1} \cdot \overline{x+2}, \quad \overline{x^2+2x+1} \cdot \overline{x^2+2}, \quad \overline{x+2}^{-1}.$$

3. Feladat. Adjuk meg a $\mathbf{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$ test alábbi elemeit:

$$\overline{x^3+x+1} \cdot \overline{x^2+1}, \quad \overline{x^3+x^2}^{-1}.$$

4. Feladat. Határozzuk meg a K testben az a elem rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az adott elem a K testben.

- a) $K = \mathbf{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$, $a = \overline{x+1}$,
- b) $K = \mathbf{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$, $a = \overline{x^2+1}$,
- c) $K = \mathbf{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$, $a = \overline{x+1}$,
- d) $K = \mathbf{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$, $a = \overline{x+1}$.

5. Feladat. Határozzuk meg a K testben az a elem minimálpolinomját.

- a) $K = \mathbf{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$, $a = \overline{x+1}$,
- b) $K = \mathbf{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$, $a = \overline{x+1}$,
- c) $K = \mathbf{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$, $a = \overline{x^2+1}$

Szorgalmi feladatok

6. Feladat. Hány 4-ed, illetve 5-öd fokú irreducibilis polinom van a kételemű test felett?

7. Feladat. Hány 8-ad fokú irreducibilis polinom van a kételemű test felett?

8. Feladat. Igazoljuk, hogy a p^k elemszámú test primitív elemeinek a minimálpolinomja k -adfokú.

9. Feladat. Keressünk primitív elemet a $\mathbf{Z}_3[x]/(x^4 + 2x^2 + 2)$ testben.

10. Feladat. Megadható-e olyan \mathbf{Z}_2 feletti 4-edfokú irreducibilis f polinom, melyre a $\mathbf{Z}_2[x]/(f)$ test \bar{x} eleme nem primitív?

11. Feladat. Igazoljuk, hogy $k \mid \varphi(p^k - 1)$.

12. Feladat. Adjunk meg olyan \mathbf{Z}_2 feletti polinomot, melynek a $\mathbf{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$ test minden eleme gyöke. Van-e olyan eleme a testnek, melynek minimálpolinomja az $x^3 + x + 1$ polinom?