56. feladat$^{\circ}$ Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?

57. feladat$^{\circ}$ Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\sigma(n) = 307$?

58. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

59. feladat Igazolja, hogy az $n = 1, 2$ esetek kivételével $\varphi(n)$ sosem páratlan.

60. feladat Oldja meg a $\varphi(2n) = n$ egyenletet a természetes számok halmazán.

61. feladat Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

62. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra teljesül a $\varphi\left(n^2\right) = n\varphi(n)$ egyenlőség.

63. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

64. feladat Mutassa meg, hogy az n szám osztóinak szorzata $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

65. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?

66. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) \cdot \varphi(n) \geq n$. Mikor áll fenn egyenlőség?

67. feladat Bizonyítsa be, hogy $3 \mid \sigma(3n - 1)$ minden n természetes számra.

68. feladat Oldja meg a $\sigma(n) = n + 3$ egyenletet a természetes számok halmazán.

69. feladat Oldja meg az $n + \tau(n) = \sigma(n)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

70. feladat Mutassa meg, hogy a $\sigma(n)$ függvény grafikonjában tetszőlegesen mély völgyeket lehet találni, azaz minden h természetes számhoz létezik olyan n, amelyre $\sigma(n-1) - \sigma(n) \geq h$ és $\sigma(n+1) - \sigma(n) \geq h$ teljesül.

71. feladat Mennyi lehet n értéke, ha $\varphi(n) = 40$, és $\sigma(n) = n + 1$?

72. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan szám, akkor $\mu\left(n^2 + 3\right) = 0$.

73. feladat Legyen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ az első n prímszám. Az $x \equiv -1 \pmod{p_1^2}$, $x \equiv -2 \pmod{p_2^2}$, ..., $x \equiv -n \pmod{p_n^2}$ kongruenciarendszer vizsgálatával mutassa meg, hogy a $\{\mu(n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatban tetszőlegesen hosszú nullákból álló blokkok találhatók.

74. feladat$^{\circ}$ Jelölje az f gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét F. Határozza meg $F(45)$ értékét, ha $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$.

75. feladat$^{\circ}$ Jelölje az előző feladatbeli f függvény megfordítási függvényét ɟ. Határozza meg ɟ(45) értékét.

76. feladat Határozza meg a $\rho(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

77. feladat Határozza meg a $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^{\alpha} \ (p \text{ prímszám}) \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$ képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

78. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra $\sum_{d|n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \sigma(d)$. (Útmutatás: igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímhatványokra igazolni az egyenlőséget.)

79. feladat Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

SZÁMELMÉLET FELADATOK

(a rutinfeladatok $^{\circ}$-val vannak jelölve)

1. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ alaphalmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ nem relatív prím}\} \subseteq A \times A$$

ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozást.

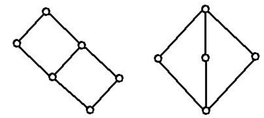
2. feladat Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

3. feladat Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

4. feladat$^{\circ}$ Rajzolja fel az $(A; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, és határozza meg a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemeket, ahol $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

5. feladat Rajzolja le az összes $2, 3$ illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

6. feladat Van-e olyan n természetes szám, amelyre n pozitív osztóinak (beleértve az 1-et és magát n-et is) Hasse-diagramja a következő? Hány megoldás van? (A rendezési reláció természetesen az oszthatóság.)



a **b**

7. feladat Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

8. feladat Jelölje $\mathrm{Eq}(A)$ az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk halmazát. Az ekvivalenciarelációk is halmazok, ezért van értelme megkérdezni, hogy egy ekvivalenciareláció részhalmaza-e egy másiknak. Tehát az $\mathrm{Eq}(A)$ halmazon a $\subseteq$ reláció részbenrendezés. Rajzolja fel $A = \{a, b\}$ illetve $A = \{a, b, c\}$ esetén ennek a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját. (Útmutatás: Célszerű az ekvivalenciák helyett az osztályozásokat tekinteni. Elég egy pillantást vetni az osztályozásokra és máris látjuk, hogy az egyik ekvivalencia része-e a másiknak. Hogyan?)

9. feladat Mi az $(\mathrm{Eq}(A); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme? És mely ekvivalenciarelációk vannak közvetlenül a legkisebb elem fölött? (Lásd az előző feladat jelöléseit és útmutatását.)

10. feladat$^{\circ}$ Adja meg a $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto \left[\frac{n}{3}\right]$ leképezés magját.

11. feladat Igazolja, hogy bármely leképezés előáll egy szürjektív és egy injektív leképezés szorzataként.

12. feladat Legyenek $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ tetszőleges leképezések, és legyen $\chi = \varphi \circ \psi$. Mutassa meg, hogy $\ker \varphi \subseteq \ker \chi$.

13. feladat Legyenek $\varphi : A \to B$ és $\chi : A \to C$ tetszőleges leképezések. Bizonyítsa be, hogy ha $\ker \varphi \subseteq \ker \chi$, akkor létezik olyan $\psi : B \to C$ leképezés, amelyre $\chi = \varphi \circ \psi$. (Hasonlítsa össze az állítást az előző feladattal.)

14. feladat$^{\circ}$ Határozza meg mindazokat az a, b természetes számokat, amelyekre $(a, b) = 22$ és $[a, b] = 264$ teljesül.

15. feladat Mely $c, d \in \mathbb{N}$ esetén oldható meg az $[a, b] = c$, $(a, b) = d$ egyenletrendszer a természetes számok halmazán? Hány megoldás van?

16. feladat Igazolja, hogy $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$ teljesül minden a, b egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való oszthatóságának eldöntésére. Például oszható-e 7-tel 334989655?

17. feladat Egy négyjegyű számmal osztva 25707 32-t, 37568 pedig 43-at ad maradékul. Melyik ez a négyjegyű szám?

18. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki az euklideszi algoritmussal 126 és 438 legnagyobb közös osztóját, majd adjon meg olyan x, y egész számokat, amelyekre $126x + 438y = (126, 438)$.

19. feladat Mennyi lehet két szomszédos Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója?

20. feladat Határozza meg az $a = 11111111$ és a $b = 111\ldots11$ (száz darab 1-es) számok legnagyobb közös osztóját.

21. feladat Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

22. feladat$^{\circ}$ Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást határozza meg, ne csak egyet!)

23. feladat Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre 130, 190 és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

24. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be kongruenciák segítségével (teljes indukció <u>nélkül</u>), hogy $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

25. feladat Határozza meg $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{4000}$ utolsó két számjegyét.

26. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $24x \equiv 84 \pmod{45}$ kongruenciát. (A megoldásokat az eredeti modulus szerint kell megadni!) Hány megoldás van modulo 45?

27. feladat Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $1456ab$ osztható legyen 41-gyel?

28. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $4x \equiv 7 \pmod 9$, $10x \equiv 4 \pmod{12}$ kongruenciarendszert.

29. feladat$^{\circ}$ Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori <u>kínai</u> probléma.)

30. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x \equiv a \pmod 3$, $x \equiv b \pmod 5$, $x \equiv c \pmod 7$ paraméteres kongruenciarendszert.

31. feladat Legyen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ az első n prímszám. Az $x \equiv -1 \pmod{p_1}$, $x \equiv -2 \pmod{p_2}$, $\ldots$, $x \equiv -n \pmod{p_n}$ kongruenciarendszer vizsgálatával mutassa meg, hogy a prímszámok sorozatában tetszőlegesen nagy hézagok találhatók.

32. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

33. feladat Bizonyítsa be, hogy $(2p-1)! - p$ osztható p^2-tel bármely p prímszám esetén.

34. feladat Igazolja, hogy bármely p páratlan prímszámra $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

35. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad 40-nel osztva maradékul 13^{158}?

36. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

37. feladat Mutassa meg, hogy $(a, 100) = 1$ esetén $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

38. feladat Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

39. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van olyan többszöröse, ami csak 9-es számjegyekből áll.

40. feladat Az x négyjegyű szám egy nagyon fontos titkos üzenetet hordoz (például a bankkártyám PIN-kódja). Elárulom, hogy $x^{275} \equiv 2 \pmod{4187}$. Hogyan lehetne ebből x-et kitalálni? És ha azt is elárulom, hogy a modulus prímtényezős felbontása $4187 = 53 \cdot 79$?

41. feladat$^{\circ}$ Teljes maradékrendszer-e $1, 11, 21, 31, \ldots, 751, 761$ modulo 77?

42. feladat$^{\circ}$ Redukált maradékrendszer-e $15, 35, 55, \ldots, 315$ modulo 32?

43. feladat Legyen T egy teljes maradékrendszer modulo m. Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k \in T} \left\{ \frac{ak+b}{m} \right\} = \frac{m-1}{2},$$

ha a és m relatív prímek, b pedig tetszőleges egész szám. (A kapcsos zárójel a törtrészt jelöli.)

44. feladat Legyen R egy redukált maradékrendszer modulo m. Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k \in R} \left\{ \frac{ak}{m} \right\} = \frac{\varphi(m)}{2},$$

ha a és m relatív prímek. (A kapcsos zárójel a törtrészt jelöli.)

45. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki 2 rendjét modulo 21.

46. feladat Legyenek a és m relatív prím természetes számok. Az $\frac{1}{m}$ törtet a alapú számrendszerben felírva egy tiszta szakaszos végtelen a-ados törtet kapunk. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint a rendje modulo m. (Például $a = 10$ és $m = 7$ esetén $\frac{1}{7}$ tízes számrendszerbeli felírása: $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)

47. feladat Legyen $p > 5$ prímszám, és tegyük fel, hogy $\frac{1}{p}$ tizedestört alakja $0,\dot{a}_1 \ldots a_n b_1 \ldots \dot{b}_n$, vagyis a szakasz hossza $2n$. Mutassa meg, hogy ekkor az $a_1 \ldots a_n + b_1 \ldots b_n$ szám csupa 9-es számjegyből áll. (Például $p = 7$ esetén $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, és valóban $142 + 857 = 999$.)

48. feladat$^{\circ}$ Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.

49. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3x^6 \equiv 1 \pmod{11}$ kongruenciát.

50. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3 \cdot 5^x \equiv 20 \pmod{11}$ kongruenciát.

51. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{173}{181}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználása nélkül.

52. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{103}{151}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználásával.

53. feladat Adjon képletet a $\left(\frac{3}{p}\right)$ Legendre-szimbólumra.

54. feladat Legyen p egy prímszám, és jelölje N a modulo p négyzetes maradékok szorzatát. Mutassa meg, hogy $p \equiv 1 \pmod 4$ esetén $N \equiv -1 \pmod p$, ha pedig $p \equiv -1 \pmod 4$, akkor $N \equiv 1 \pmod p$.

55. feladat Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\varphi(n) = 1210$?