BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

1. Határozzuk meg azokat az a természetes számokat ((a, b) számpárokat), amely(ek)re teljesülnek az alábbi feltételek:
   a. $[a, 16] = 48$
   b. $(a, 20) = 1$
   c. $(a, 60) = 15$
   d. $(a, b) = 13$ és $[a, b] = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$
   e. $(a, b) = 26$ és $[a, b] = 2^4 \cdot 13 \cdot 23$
   f. $(a, b) = 15$ és $[a, b] = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
   g. $[a, b] = 720$ és $a + b = 98$
   h. $(a, b) = 7$ és $a + b = 100$
   i. $(a, b) = 147$ és $a + b = 1323$
   j. $(a, b) = 17$ és $a^2 - b^2 = 2023$
   k. $(a, b, c) = 4$ és $[a, b, c] = 60$
2. Mutassuk meg, hogy bármely a, b egész számokra igazak az alábbi állítások!
   a. $(13 \mid 2a + b$ és $13 \mid 5a - 4b) \Rightarrow 13 \mid a - 6b$
   b. $(17 \mid 9a + 3b$ és $17 \mid 5a - 4b) \Rightarrow 17 \mid 11b - a$
   c. $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$ (Döntsük el ennek a szabálynak a segítségével, hogy osztható -e héttel a 334989655 szám!)
3. Egy négyjegyű számmal osztva 25707 32-t, 37568 pedig 43-at ad maradékul. Melyik ez a négyjegyű szám?
4. 10839-et és 11863-at ugyanazzal a háromjegyű számmal osztva ugyanannyi a maradék. Mennyi lehet ez a maradék?
5. Határozzuk meg a következő legnagyobb közös osztók lehetséges értékeit (a tetszőleges egész szám lehet)!
   a. $(a, a + 1)$
   b. $(a, a + 2)$
   c. $(2a + 3, 4a + 5)$
   d. $(7a + 1, 8a + 3)$
6. Mely n természetes számok esetén lesz az $\frac{5n-1}{n+1}$ illetve a $\frac{2n+6}{n-3}$ tört értéke egész szám?
7. Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ illetve a $\frac{2n-5}{3n-7}$ törtet?
8. Egy út egyik oldalán 12 méterenként fák sorakoznak, a másik oldalon pedig villanyoszlopok, 75 méterenként. Ahol most állok, ott éppen szemben van egymással egy fa és egy villanyoszlop. Mennyit kell sétálnom a következő ilyen helyig?
9. Január hatodikán négy hajó futott be Boston kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Bostonba, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12 illetve 16 hetente. Találkoznak -e még idén ebben a kikötőben?
10. Határozzuk meg az $a = 11111111$ és a $b = 111\ldots11$ (száz darab 1-es) számok legnagyobb közös osztóját.
11. Határozzuk meg az alábbi (a, b) számpárok legnagyobb közös osztóját az euklideszi algoritmus segítségével, és adjuk meg az $ax + by = (a, b)$ diofantoszi egyenlet egy megoldását!
    a. $(4608, 4096)$
    b. $(438, 126)$
    c. $(1053, 567)$
    d. $(211, 101)$
    e. $(754, 221)$
    f. $(21, 13)$
    g. (F_{n+1}, F_n) (szomszédos Fibonacci-számok)
12. Döntsük el, hogy megoldhatóak -e az alábbi diofantoszi egyenletek! Ha igen, adjuk meg az összes megoldást!
    a. $47x + 29y = 4$
    b. $21x + 56y = 72$
    c. $117x - 63y = 36$
    d. $44x + 121y = 48$
    e. $18x + 28y = 10$

f. $17x + 11y = 22$

g. $27x + 15y = 75$

13. Adjunk módszert az $ax + by + cz = d$ alakú diofantoszi egyenletek megoldhatóságának eldöntésére, és egy megoldás meg-keresésére! Találjunk egy megoldást a $4x + 6y + 5z = 3$ egyenletre, majd gyártsunk ebből minél több (végtelen sok) megoldást!

14. Bontsuk fel a 367-et két természetes szám összegére úgy, hogy az egyik szám osztható legyen 17-tel, a másik pedig 21-gyel!

15. Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre $130, 190$ és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

16. Mutassuk meg, hogy bármely a, b, c egész számokra teljesülnek a következő állítások!

a. $(a, b) \cdot [a, b] = ab$

b. $(a \mid c$ és $b \mid c) \Leftrightarrow [a, b] \mid c$

c. $(c \mid a$ és $c \mid b) \Leftrightarrow c \mid (a, b)$

d. $a \mid bc \Leftrightarrow \frac{a}{(a,b)} \mid c$

17. Egy n oldalszámú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hétmérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be? Általánosítsuk a feladatot m-mérföldes csizmára!

18. Igazoljuk az alábbi kongruenciákat (és ezzel a kilenccel illetve tizeneggyel való oszthatóságra ismert szabályokat)!

a. $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \pmod 9$

b. $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n \pmod{11}$

19. Mutassuk meg kongruenciák segítségével, hogy tetszőleges n pozitív egész számra teljesülnek a következő oszthatósági relációk!

a. $13 \mid 3^{n+2} + 4^{2n+1}$

b. $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$

c. $7 \mid 5^{2n} + 3 \cdot 2^{5n-2}$

20. Határozzuk meg a $7^{4000}, 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{4000}, 2^{1990}$ számok utolsó két számjegyét!

21. Milyen maradékot ad 13-mal osztva 42^{600} illetve 57^{2003}?

22. Szabad -e egy kongruenciát leosztani egy számmal (persze olyannal, amivel mindkét oldal osztható), azaz igaz -e, hogy ha $ca \equiv cb \pmod m$, akkor $a \equiv b \pmod m$?

23. Bizonyítsuk be, hogy $ca \equiv cb \pmod m$ akkor és csak akkor, ha $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ \frac{m}{(m,c)})$!

24. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat úgy, hogy átírjuk őket kétismeretlenes lineáris diofantoszi egyenletté!

a. $3x \equiv 5 \pmod 7$

b. $5x \equiv 4 \pmod 8$

c. $9x \equiv 17 \pmod{10}$

d. $8x \equiv 11 \pmod{13}$

25. Oldjuk meg a fenti $ax \equiv b \pmod m$ alakú kongruenciáit úgy, hogy beszorozzuk mindkét oldalt egy olyan a^* számmal, amelyre $a \cdot a^* \equiv 1 \pmod m$ teljesül!

26. Oldjuk meg ugyanezeket a kongruenciákat úgy, hogy b-t kicseréljük olyan b' számra, amelyre $a \mid b'$ és $b' \equiv b \pmod m$ teljesül!

27. Oldjuk meg tetszőleges módszerrel (minél egyszerűbben) az alábbi kongruenciákat! Ha a megoldás során esetleg megváltoztatjuk a modulust, akkor is az eredeti modulus szerinti maradékosztályokként adjuk meg a megoldásokat!

a. $202x \equiv 157 \pmod{203}$

b. $14x \equiv 84 \pmod{21}$

c. $104x \equiv 74 \pmod{60}$

d. $26x \equiv 16 \pmod{34}$

e. $30x \equiv 48 \pmod{58}$

f. $40x \equiv 28 \pmod{62}$

28. Hány modulo m maradékosztályt alkotnak az $ax \equiv b \pmod m$ kongruencia megoldásai?

29. Mennyit ad 73-mal osztva x maradékul, ha $x^{100} \equiv 22 \pmod{73}$ és $x^{101} \equiv 69 \pmod{73}$?

30. Mennyit ad 73-mal osztva x maradékul, ha $x^{100} \equiv 57 \pmod{73}$ és $x^{101} \equiv 11 \pmod{73}$?

31. Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $1456ab$ osztható legyen 41-gyel (43-mal, 47-tel)?

32. Számoljuk ki $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(10), \varphi(100), \varphi(1000)$ értékét közvetlenül a definíció alapján.

33. Számítsuk ki $\varphi(360), \varphi(540), \varphi(18900), \varphi(7!)$ értékét prímtényezős felbontás segítségével.

34. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, m) = 1$ és $b \equiv c \pmod{\varphi(m)}$, akkor $a^b \equiv a^c \pmod{m}$.

35. Mennyit ad 40-nel osztva maradékul $39^{390}, 39^{39}, 29^{98}$ illetve 163^{161}?

36. Határozzuk meg $39^{39^{390}}, 39^{39^{39}}, 87^{29^{98}}$ illetve $11^{163^{161}}$ utolsó két számjegyét!

37. Mennyit ad maradékul $89^{33^{100}}, 60^{31^{147}}$ illetve $34^{47^{119}}$ 29-cel osztva?

38. Melyik az az egyjegyű szám, amelynek tizenharmadik hatványa hetesre végződik?

39. Mennyit ad héttel osztva maradékul $11^{11} + 11^{11^2} + 11^{11^3} + \cdots 11^{11^{11}}$?

40. Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

41. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra igazak a következő állítások.
    a. Tízes számrendszerben n^5 és n ugyanarra a számjegyre végződik.
    b. $11 \mid n^{11} + 10n$
    c. Az $n, n^8 - 1, n^8 + 1$ számok közül az egyik osztható 17-tel.
    d. Ha $(n, 10) = 1$, akkor van olyan többszöröse, ami csak 9-es számjegyből áll.
    e. Ha $(n, 10) = 1$, akkor van olyan többszöröse, ami csak 1-es számjegyből áll.

42. Mutassuk meg, hogy az alábbi m és c értékekkel $(a, m) = 1$ esetén $a^c \equiv 1 \pmod{m}$ teljesül. (Hasonlítsuk össze eredményünket az Euler-Fermat–tétellel!)
    a. $m = 15, c = 4$
    b. $m = 100, c = 20$
    c. $m = 1000, c = 100$
    d. $m = 1155, c = 60$
    e. $m = 1323, c = 126$

43. Oldjuk meg újra a 25. feladatot, de most már próbálgatás helyett használjuk az Euler-Fermat–tételt.

44. Az x négyjegyű szám egy nagyon fontos titkos üzenetet hordoz (például a bankkártyám PIN-kódja). Elárulom, hogy $x^{275} \equiv 2 \pmod{4187}$. Hogyan lehetne ebből x-et kitalálni? És ha azt is elárulom, hogy a modulus prímtényezős felbontása $4187 = 53 \cdot 79$?

45. Mennyit ad maradékul
    a. 17-tel osztva $15!$;
    b. 29-cel osztva $2(26!)$;
    c. 31-gyel osztva $32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 61$;
    d. 23-mal osztva $\binom{22}{6}$;
    e. 43-mal osztva $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 84$?

46. Igazoljuk a következő kongruenciákat (p páratlan prímszám).
    a. $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$
    b. $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$
    c. $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$

47. Teljes maradékrendszer-e $1, 11, 21, 31, \ldots, 751, 761$ modulo 77?

48. Teljes maradékrendszer-e $7, 22, 37, 52, \ldots, 11632, 11647$ modulo 777?

49. Kiegészíthetők-e a $-17, -13, 8, 9$ számok egy modulo 21 teljes maradékrendszerré?

50. Redukált maradékrendszer-e $5, 15, 25, \ldots, 155$ modulo 32?

51. Redukált maradékrendszer-e $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots, (p-2) \cdot (p-1), (p-1) \cdot 1$ modulo p (p prímszám)?

52. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszereket.
   a. $5x \equiv 1 \pmod{6}, 7x \equiv 9 \pmod{10}$
   b. $x \equiv 3 \pmod{6}, x \equiv 6 \pmod{8}$
   c. $4x \equiv 7 \pmod{9}, 10x \equiv 4 \pmod{12}$
   d. $x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{6}, x \equiv 4 \pmod{7}$
   e. $4x \equiv 8 \pmod{5}, 3x \equiv 9 \pmod{18}, 5x \equiv 12 \pmod{8}$
53. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy megoldható legyen a kongruenciarendszer.
   a. $x \equiv 5 \pmod{18}, x \equiv 8 \pmod{21}, x \equiv a \pmod{35}$
   b. $x \equiv 3 \pmod{11}, x \equiv 1 \pmod{15}, x \equiv 11 \pmod{20}, x \equiv a \pmod{18}$
   c. $4x \equiv 7 \pmod{5}, 5x \equiv -a \pmod{6}, 2x \equiv 5 \pmod{9}$
54. Oldjuk meg a következő kongruenciarendszereket a kínai maradéktétel segítségével.
   a. $x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}$
   b. $3x \equiv 2 \pmod{4}, 2x \equiv 3 \pmod{5}$
   c. $5x \equiv 3 \pmod{7}, 4x \equiv 5 \pmod{10}$
   d. $x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{7}, x \equiv 8 \pmod{9}$
   e. $x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}, x \equiv 5 \pmod{9}$
   f. $3x \equiv 1 \pmod{4}, 5x \equiv 2 \pmod{7}, 7x \equiv 8 \pmod{9}$
   g. $x \equiv 4 \pmod{5}, x \equiv 5 \pmod{6}, x \equiv 6 \pmod{7}, x \equiv 10 \pmod{11}$
   h. $x \equiv 4 \pmod{7}, x \equiv 5 \pmod{9}, x \equiv 6 \pmod{11}, x \equiv 7 \pmod{13}$
   i. $3x \equiv 1 \pmod{4}, 2x \equiv 3 \pmod{5}, 5x \equiv 2 \pmod{7}, 7x \equiv 8 \pmod{9}$
   j. $3x \equiv 12 \pmod{5}, 10x \equiv -2 \pmod{14}, 5x \equiv 5 \pmod{15}, 6x \equiv 6 \pmod{22}$
55. Oldjuk meg az alábbi paraméteres kongruenciarendszereket.
   a. $x \equiv a \pmod{4}, x \equiv b \pmod{5}$
   b. $x \equiv a \pmod{7}, x \equiv b \pmod{9}$
   c. $x \equiv a \pmod{3}, x \equiv b \pmod{5}, x \equiv c \pmod{7}$
   d. $x \equiv a \pmod{5}, x \equiv b \pmod{9}, x \equiv c \pmod{11}$
56. Határozzuk meg a $\{20, 40, 60, 80, \ldots\}$ és a $\{12, 25, 38, 41, \ldots\}$ halmazok metszetét.
57. Mi a legkisebb közös eleme a $20, 29, 38, \ldots$ és a $7, 15, 23, 31, \ldots$ valamint a $19, 30, 41, \ldots$ számtani sorozatoknak?
58. Melyik az a négyjegyű szám, amelyik 131-gyel osztva 112 maradékot ad, 132-vel osztva pedig 98-at?
59. Melyik az a háromjegyű szám amelyik héttel osztva négyet, kilenccel osztva hetet, tízzel osztva pedig hatot ad maradékul?
60. Ha $x \equiv 6 \pmod{7}$ és $x \equiv 9 \pmod{12}$, akkor mennyit ad x maradékul 28-cal osztva?
61. Hány birkát lehet rábízni egy pásztorra, aki csak tízig tud számolni?
62. Legyen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ az első n prímszám. Az $x \equiv -1 \pmod{p_1}, x \equiv -2 \pmod{p_2}, x \equiv -3 \pmod{p_3}, x \equiv -n \pmod{p_n}$ kongruenciarendszer vizsgálatával mutassuk meg, hogy a prímszámok sorozatában tetszőlegesen nagy hézagok találhatók.
63. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.
   a. $\varphi(x) = 1$
   b. $\varphi(x) = 1001$
   c. $\varphi(7^x) = 705894$
   d. $\varphi(3^x 5^y 7^z) = 3600$
   e. $\varphi(x) = 1210$
   f. $\varphi(2x) = x$
   g. $\varphi(3x) = 2x$
   h. $\varphi(2x) = \varphi(3x)$
   i. $\varphi(5x) = \varphi(7x)$
   j. $2\varphi(x) = x$

64. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra teljesül a $\varphi\left(n^2\right) = n\varphi(n)$ egyenlőség.

65. Számítsuk ki $\tau(360), \tau(540), \tau(18900), \tau(7!)$ értékét.

66. Határozzuk meg az alábbi egyenletek legkisebb pozitív megoldását.
   a. $\tau(n) = 23$
   b. $\tau(n) = 25$
   c. $\tau(n) = 12$

67. Melyek azok a ternészetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

68. Határozzuk meg 60, illetve 36 osztóinak szorzatát.

69. Mutassuk meg, hogy az n szám osztóinak szorzata $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

70. Egy természetes szám osztóinak szorzata 8000. Melyik ez a szám?

71. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ minden n természetes számra.

72. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n szám van, amelyre $\tau(n+1) \geq 2\tau(n)$.

73. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?

74. Számítsuk ki $\sigma(360), \sigma(540), \sigma(18900), \sigma(7!)$ értékét.

75. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.
   a. $\sigma(x) = 307$
   b. $\sigma(x) = 781$
   c. $\sigma(2^x 3^y) = 280$

76. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra teljesülnek az alábbi állítások.
   a. $\sigma(n)$ akkor és csak akkor páratlan, ha n négyzetszám, vagy egy négyzetszám kétszerese
   b. $\sigma(n) \leq \binom{n+1}{2}$
   c. $\sigma(n) \leq \binom{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{2} + n$
   d. $3 \mid \sigma(3n-1)$
   e. $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2 \Longleftrightarrow n$ tökéletes szám

77. Mutassuk meg, hogy a $\sigma(n)$ függvény grafikonjában tetszőlegesen mély völgyeket lehet találni, azaz minden h természetes számhoz létezik olyan n, amelyre $\sigma(n-1) - \sigma(n) \geq h$ és $\sigma(n+1) - \sigma(n) \geq h$ teljesül.

78. Mennyi lehet n értéke, ha $\varphi(n) = 40$, és $\sigma(n) = n + 1$?

79. Bizonyítsuk be, hogy minden n, m természetes számra érvényesek a következő egyenlőtlenségek, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha n és m relatív prímek.
   a. $\varphi(nm) \geq \varphi(n)\varphi(m)$
   b. $\tau(nm) \leq \tau(n)\tau(m)$
   c. $\sigma(nm) \leq \sigma(n)\sigma(m)$

80. Határozzuk meg $\mu(1), \mu(5), \mu(30), \mu(32), \mu(14), \mu(7!)$ értékét.

81. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.
   a. $\mu^2(x) + 2 = \mu(x)$
   b. $\mu^3(x) - \mu(x) = 0$
   c. $\mu\left(x^2\right) + \mu(x) = 2$
   d. $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$
   e. $\mu(x) + 2 = \mu(5x)$

82. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $\mu\left(n^3\right) = \mu\left(n^2\right)$.

83. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan szám, akkor $\mu\left(n^2+3\right) = 0$.

84. Legyen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ az első n prímszám. Az $x \equiv -1 \pmod{p_1^2}, x \equiv -2 \pmod{p_2^2}, x \equiv -3 \pmod{p_3^2}, x \equiv -n \pmod{p_n^2}$ kongruenciarendszer vizsgálatával mutassuk meg, hogy a $\{\mu(n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatban tetszőlegesen hosszú nullákból álló blokkok találhatók.

85. Legyen f egy gyengén multiplikatív számelméleti függvény, amelyre $f(2) = 5, f(3) = 2, f(12) = 3$ teljesül. Számítsuk ki $f(6)$ és $f(4)$ értékét, majd f összegzési, és megfordítási függvényének értékét a 12 helyen.

86. Határozzuk meg a következő függvények összegzési függvényét, és írjuk rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

a. $\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0 \\ 0, & \text{ha } n \neq 0 \end{cases}$

b. $\varepsilon(n) = 1$

c. $\iota(n) = n$

d. $\rho(n) = \frac{1}{n}$

e. $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^\alpha \ (p \text{ prímszám}) \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$ (Mangoldt-féle függvény)

87. Mi az előző feladatban definiált ι függvény megfordítási függvénye?

88. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra teljesülnek az alábbi egyenlőségek. (Útmutatás: igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímhatványokra igazolni az egyenlőséget.)

a. $\sum\limits_{d|n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum\limits_{d|n} \sigma(d)$

b. $\sum\limits_{d|n} d\tau(d) = \sum\limits_{d|n} \sigma(d) \frac{n}{d}$

89. Adjunk új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

90. Mutassuk meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.

91. Tudjuk, hogy $3^{10} \equiv 1 \pmod{61}$ és $15^{15} \equiv 1 \pmod{61}$. Döntsük el ennek alapján, hogy prinitív gyök-e 45 modulo 61.

92. Bizonyítsuk be, hogy 11 primitív gyök modulo 17, felhasználva, hogy $11^{40} \equiv -1 \pmod{17}$.

93. Legyen p egy prímszám, g pedig egy primitív gyök modulo p. Igazoljuk, hogy $g^k \equiv g^l \pmod{p}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $k \equiv l \pmod{p-1}$.

94. Bizonyítsuk be, hogy ha $aa^* \equiv 1 \pmod{p}$, akkor ind $a \equiv -$ind $a^* \pmod{p-1}$ (p tetszőleges prímszám, az indexek pedig egy tetszőleges primitív gyökre vonatkoznak).

95. Készítsünk indextáblázatot a $p = 11$ modulushoz.

96. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat az indextáblázat segítségével.

a. $3x \equiv 7 \pmod{11}$

b. $41x \equiv 25 \pmod{11}$

c. $x^6 \equiv 3 \pmod{11}$

d. $x^5 \equiv 9 \pmod{11}$

e. $5x^6 \equiv 2 \pmod{11}$

f. $3x^6 \equiv 1 \pmod{11}$

g. $6^x \equiv 5 \pmod{11}$

h. $5^x \equiv 9 \pmod{11}$

i. $3 \cdot 5^x \equiv 10 \pmod{11}$

j. $2x^2 - 2x - 4 \equiv 0 \pmod{11}$

k. $2x^2 - 2x + 5 \equiv 0 \pmod{11}$

l. $2x^{10} - 2x^5 - 4 \equiv 0 \pmod{11}$

97. Határozzuk meg a négyzetes maradékokat modulo 11.

98. Számítsuk ki a $\left(\frac{-9}{37}\right), \left(\frac{97}{101}\right), \left(\frac{5}{31}\right), \left(\frac{32}{67}\right), \left(\frac{101}{103}\right)$ Legendre-szimbólumok értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználása nélkül.

99. Számítsuk ki a $\left(\frac{113}{151}\right), \left(\frac{109}{157}\right), \left(\frac{81}{163}\right), \left(\frac{141}{181}\right), \left(\frac{101}{103}\right)$ Legendre-szimbólumok értékét a kvadratikus reciprocitási tétel felhasználásával.

100. Bizonyítsuk be, hogy minden páros szám előáll két prímszám összegeként.