SZÁMELMÉLETI FELADATOK

1. Az $1 = 1,\ 3 = 1+2,\ 6 = 1+2+3,\ 10 = 1+2+3+4$ számokat a pitagoreusok *háromszög számoknak* nevezték, mert az összeadandóknak megfelelő számú pont szabályos háromszög alakban is elrendezhető. Bizonyítsa be az alábbi állításokat:

(a) Egy természetes szám pontosan akkor háromszögszám, ha $n(n+1)/2$ alakú valamilyen $n \in \mathbf{N}$-re (Pithagoras kb. i.e. 550).

(b) Egy $n \in \mathbf{N}$ pontosan akkor háromszögszám, ha $8n+1$ négyzetszám (Plutarchos kb. i.sz. 100).

(c) Két egymás utáni háromszögszám összege teljes négyzet (Nikomachosz kb. i.sz. 100).

(d) Ha n háromszögszám, akkor $9n+1,\ 25n+3,\ 49n+6$ is az (Euler 1775).

2. Ha t_n jelöli az n-edik háromszögszámot, akkor $t_n = \binom{n+1}{2},\quad n \geq 1.$

3. Igazolja Aryabhata (kb. i.sz. 500) formuláját

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

[Használja az 1(c) feladat eredményét].

4. Maradékos osztás segítségével igazolja, hogy

(a) minden négyzetszám $3k$ vagy $3k+1$ alakú;

(b) minden köbszám $9k,\ 9k+1$ vagy $9k+8$ alakú;

(c) $3a^2 - 1$ sohasem négyzetszám;

(d) $n(n+1)(2n+1)/6$ mindig egész.

5. Igazolja, hogy ha egy egész szám egyidejűleg négyzetszám és köbszám, akkor $7k$ vagy $7k+1$ alakú [pl. $64 = 8^2 = 4^3$] .

6. Igazolja, hogy tetszőleges $a,\ b$ $(b \neq 0)$ egészekhez vannak olyan $q,\ r$ egészek, hogy

$$a = bq + r \text{ valamint } -\frac{1}{2}|b| < r \leq \frac{1}{2}|b|,$$

s ezen $q,\ r$ egyértelműen meghatározott.

7. Igazolja, hogy a

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots$$

sorozatban nincs négyzetszám.

[Vegyék észre, hogy $111\ldots111 = 111\ldots108 + 3 = 4k + 3$.]

8. Ha a páratlan, akkor $32|(a^2+3)(a^2+7)$.

9. Ha a és b közül legalább az egyik nemzéró, akkor $ln.k.o.(2a-3b,4a-5b)|b$ és így $ln.k.o.(2a+3,4a+5)\sim 1$.

10. Igazolja, hogy négy egymás utáni egész szám szorzata osztható 24-gyel, míg öté 120-szal.

11. Igazolja, hogy

(a) $6|a(a^2+11)$ bármely $a\in\mathbf{Z}$-re.

(b) $24|a(a^2-1)$ bármely páratlan $a\in\mathbf{Z}$ -re.

(c) $8|a^2-b^2$ bármely páratlan $a,\ b\in\mathbf{Z}$-re.

(d) $24|a^2+23$, ha $a\in\mathbf{Z},\ de\ 2,\ 3\not|a$.

(e) $360|a^2(a^2-1)(a^2-4)$ bármely $a\in\mathbf{Z}-re$.

12. Fölhasználva, hogy $\mathbf{Z}$ főideálgyűrű igazolja a legnagyobb közös osztó alábbi tulajdonságait:

(a) Ha $ln.k.o.(a,b)\sim ln.k.o.(a,c)\sim 1$, akkor $ln.k.o.(a,bc)\sim 1$.

(b) Ha $ln.k.o.(a,b)\sim 1$ és $c|a$, akkor $ln.k.o.(b,c)\sim 1$.

(c) Ha $ln.k.o.(a,b)\sim 1$ és $c|a+b$, akkor $ln.k.o.(a,c)\sim ln.k.o.(b,c)\sim 1$.

13. Bizonyítsa be, hogy valahányszor $d|n$ mindannyiszor $2^d-1|2^n-1$.

14. Euklideszi algoritmussal igazolja, hogy $ln.k.o.(ka,kb)\sim k\cdot ln.k.o.(a,b)$.

15. Bizonyítsa be, hogy ha $a,\ b$ relatív prím egészek, akkor $a+b$ és ab is azok.

16. Oldja meg az alábbi diophantoszi egyenleteket:

$$14x+35y=93$$
$$56x+72y=40$$
$$221x+35y=11$$
$$158x-57y=7$$

17. Ha $a,\ b$ relatív prím egészek, akkor az $ax-by=c$ diophantoszi egyenletnek végtelen sok természetes szám tesz eleget. Igazolja.

18. Bizonyítsa be, hogy az $ax+by+cz=d$ diophantoszi egyenlet pontosan akkor oldható meg (az egész számok körében), ha $ln.k.o.(a,b,c)|d$.

19. Mr.Smith beváltott egy csekket készpénzre bankjában, s a pénztáros véletlenül fölcserélte a dollárok és a centek számát. Mr.Smith ezt csak azután vette észre, miután 68 centet elköltvén azt tapasztalta, hogy kétszer annyi pénze van, mint amennyi eredetileg a csekken szerepelt. Határozza meg azt a legkisebb összeget, amely szerepelhetett a csekken.

20. Fejtse meg az alábbi rejtvényeket:

(a) 100 véka gabonát osztunk szét 100 személy között úgy, hogy minden férfi 3, minden nő 2, s minden gyermek 1/2 vékányit kap. Hány férfi, nő és gyermek volt? (yorki Alcuin kb. 775)

(b) Volt 63 egyenlő rakás gyümölcs és még 7 db. Ezt 23 vándor között osztották szét egyenlő arányban. Hány gyümölcs volt egy-egy rakásban? (Mahavira kb. 850)

21. Azt sejtik, hogy végtelen sok $n^2 - 2$ alakú prímszám van. Adjon meg öt ilyen prímszámot.

22. Ellenpéldával cáfolja meg azon sejtést, hogy minden pozitív egész szám $p + a^2$ alakban írható, ahol p vagy prím, vagy 1, továbbá $a \in \mathbf{Z}$.

23. Igazolja a következő állításokat:

(a) Minden $3n + 1$ alakú prímszám $6m + 1$ alakú is.

(b) Minden $3n + 2$ alakú egész számnak van ugyanilyen alakú prímosztója.

24. Mutassa meg, hogy ha $p \geq 5$ prím, akkor $p^2 + 2$ összetett szám.

25. Bizonyítsa be:

(a) Minden $n^4 + 4$ alakú egész, ha $n > 1$ összetett szám.

(b) Ha $n > 4$ összetett, akkor $n|(n-1)!$.

(c) Minden $8^n + 1$ alakú egész összetett, ha $n > 1$.

26. Adja meg 50! összes prímosztóját.

27. Ha p és q olyan prímek, hogy $p \geq q \geq 5$, akkor $24|p^2 - q^2$. Igazolja.

28. Ha $p \neq 5$ páratlan prím, akkor mutassa meg, hogy $p^2 - 1$ vagy $p^2 + 1$ osztható 10-zel.

29. Mutassa meg, hogy ha $p \not| n$ minden $p \leq \sqrt[3]{n}$, akkor n vagy prím vagy két prím szorzata. [Indirekt úton: tegye föl, hogy n legalább három prímszám szorzata.]

30. Igazolja, hogy ha p_n az n-edik prímszám, akkor

(a) $p_n > 2n - 1$ *ha* $n \geq 5$.

(b) Egyetlen $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ sem teljes négyzet.

(c) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}$ sohasem egész.

31. Adjon meg olyan $a,\ b,\ n$ egészeket, hogy $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$) de $a \not\equiv b \pmod{n}$.

32. Ha $a \equiv b \pmod{n}$, akkor $ln.ko.(a,\ n) \sim ln.k.o.(b,\ n)$. Igazolja.

33. (a) Milyen maradékot ad 2^{50} és 41^{65} $7-tel$ osztva?

(b) Mi lesz a maradék, ha

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 99^5 + 100^5 \ -t$$

elosztjuk 4-gyel?

34. Mutassa meg, hogy $39|53^{103} + 103^{53}$ és $7|111^{333} + 333^{111}$.

35. Kongruenciákat használva igazolja a következő állításokat:

(a) $7|5^{2n} + 3 \cdot 2^{5n-2}$;

(b) $13|3^{n+2} + 4^{2n+1}$;

(c) $27|2^{5n+1} + 5^{n+2}$;

(d) $43|6^{n+2}+7^{2n+1}$.

36. Ha p olyan prímszám, hogy $n<p<2n$, akkor

$$\binom{2n}{n}\equiv 0 \pmod p.$$

Igazolja.

37. Ha $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ teljes maradékrendszer modulo n, továbbá $ln.k.o.(a,\ n)\sim 1$, akkor $aa_1,\ aa_2,\dots,aa_n$ is teljes maradékrendszer modulo n.

38. Bizonyítsa be az alábbi állításokat:

(a) Ha $ln.k.o.(a,\ n)\sim 1$, akkor a

$$c,\ c+a,\ c+2a,\ c+3a,\dots,c+(n-1)a$$

egészek egy teljes maradékrendszert alkotnak modulo n.

(b) Bármely egymás utáni n egész szám teljes maradékrendszert alkot modulo n.

39. Mutassa meg, hogy ha $ab\equiv cd \pmod n$ és $b\equiv d \pmod n$ továbbá $ln.k.o.(b,\ d)\sim 1$, akkor $a\equiv c \pmod n$.

40. Igazolja következő állításokat:

(a) Tetszőleges a egészre a^2 utolsó jegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9.

(b) Egy köbszám akármilyen jegyre végződhet.

(c) Ha a egész, akkor a^4 utolsó jegye 0, 1, 5 vagy 6.

41. Adja meg 9^{9^9} utolsó két jegyét.

42. Modulo 9 vagy 11 kongruenciák segítségével keresse meg az alábbi számolásokban a hiányzó számjegyeket:

(a) $51840\cdot 273581=1418243x040$;

(b) $2x99561=(3(523+x))^2$;

(c) $2784x=x\cdot 493$.

43. Milyen maradékot ad 4444^{4444}, ha elosztjuk 9-cel

44. Határozza meg 7^{999} utolsó három jegyét.

45. Jelölje t_n az n-edik háromszögszámot. Mutassa meg, hogy $t_{n+2k}\equiv t_n \pmod k$; s így t_n és t_{n+20} ugyanarra a jegyre végződik.

46. Adja meg azon $n>1$ értékeket, amelyekre

$$1!+2!+3!+\cdots+n!$$

teljes négyzet.

47. Adjon meg szabályt a 7, 11 és 13-mal való oszthatósságra. Megfogalmazható e ilyen szabály bármely p prímszámra?

48. *Palindromnak* nevezik az olyan számot, amely visszafelé olvasva is ugyanaz (például: 373, 521125). Bizonyítsa be, hogy minden páros sok jegyű palindrom osztható 11-gyel.

49. Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciákat:

(a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$.

(b) $5x \equiv 2 \pmod{26}$.

(c) $6x \equiv 15 \pmod{21}$.

50. Kongruenciák segítségével oldja meg a következő diophantoszi egyenleteket:

(a) $4x + 51y = 9$.

(b) $5x - 53y = 17$.

51. Adja meg $3x - 7y \equiv 11\ (mod\ 13)$ összes megoldását.

52. Oldja meg az alábbi kongruencia-rendszereket:

(a) $x \equiv 1 \pmod 3,\ x \equiv 2 \pmod 5,\ x \equiv 3 \pmod 7$.

(b) $x \equiv 5 \pmod{11},\ x \equiv 14 \pmod{29},\ x \equiv 15 \pmod{31}$.

(c) $2x \equiv 1 \pmod 5,\ 3x \equiv 9 \pmod 6,\ 4x \equiv 1 \pmod 7,\ 5x \equiv 9 \pmod{11}$.

53. Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Adja meg a kosárban levő tojások minimális számát. (Brahmagupta i.sz. VII.sz.)

54. Egy 17 tagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani azt tapasztalták, hogy három arany kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután ujraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most 10 arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Határozza meg a lopott aranypénzek minimális számát. (Ókori kínai probléma.)

55. Bizonyítsa be, hogy az

$$x \equiv a \pmod n \quad x \equiv b \pmod m$$

kongruencia-rendszer pontosan akkor oldható meg, ha $ln.k.o.(n,\ m)|a - b$; és amennyiben megoldható, az mod(lk.k.t.(n, m)) kongruencia erejéig egyértelmű.

56. Igazolja, hogy $18^6 \equiv 1\ (mod\ 7^k)\ k = 1, 2, 3 - ra.$

57. (a) Mutassa meg, hogy $a^{12} \equiv 1\ (mod\ 35)$, ha $ln.k.o.(a, 35) \sim 1$.

(b) Ha $ln.k.o.(a, 42) \sim 1$, akkor $168|a^6 - 1$. Igazolja.

58. Bizonyítsa be, hogy végtelen sok olyan n összetett szám van, amelyre $a^{n-1} \equiv a \pmod n$. [Mi a helyzet, ha $n = 2p$ valamilyen p páratlan prímre?]

59. Legyen a olyan egész, amelyre $ln.k.o.(a, 30) \sim 1$. Mutassa meg, hogy $60|a^4 + 59$.

60. (a) Fermat tétele segítségével határozza meg 3^{100} utolsó jegyét.

(b) Igazolja, hogy bármely a egészre a^5 és a utolsó jegye megegyezik.

61. Ha $7 \not| a$,akkor vagy $7|a^3 + 1$ vagy $7|a^3 - 1$.

62. A Halley üstökös három legutóbbi megjelenése 1835, 1910 és 1986-ban volt, legközelebb 2061-ben lesz látható. Igazolja, hogy

$$1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 0 \pmod 7.$$

63. A Fermat tétel alapján mutassa meg, hogy

(a) ha p prím és $ln.k.o.(a, p) \sim 1$. akkor $x \equiv a^{p-2}b \pmod p$ megoldása az $ax \equiv b \pmod p$ lineáris kongruenciának.

(b) Az előző feladat alapján oldja meg a következő lineáris kongruenciákat:

$$2x \equiv 1 \pmod{31},\ 6x \equiv 5 \pmod{11} \text{ és } 3x \equiv 17 \pmod{29}.$$

64. Föltéve, hogy a és b olyan egészek, amelyek nem oszthatók a p prímszámmal igazolja, hogy

(a) $a^p \equiv b^p \pmod p$, ha $a \equiv b \pmod p$.

(b) $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$, ha $a^p \equiv b^p \pmod p$.

65. Legyen p páratlan prím, valamint $1 \le k \le p - 1$. Igazolja, hogy

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p.$$

66. Tegyük föl, hogy p és q különböző páratlan prímek, továbbá $p-1|q-1$. Mutassa meg, hogy valahányszor $ln.k.o.(a, pq) \sim 1$, mindannyiszor $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

67. Legyenek p és q különböző prímek.Igazolja, hogy

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

68. Ha $M_p = 2^p - 1$ összetett, ahol p prím, akkor M_p pszeudoprím. Igazolja.

69. Mutassa meg, hogy az alábbi számok mindegyike abszolut pszeudoprím:

(a) $1387 = 19 \cdot 73$,

(b) $2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31$,

(c) $1905 = 3 \cdot 5 \cdot 127$.

70. Igazolja, hogy 341 pszeudoprím, de nem abszolut pszeudoprím fölhasználva, hogy $11^{341} \not\equiv 11 \pmod{341}$. [Vegyük észre, hogy $31 \not| 11^{34} - 11$.]

71. Ha $n = 2p$, ahol p páratlan prím, akkor $a^{n-1} \equiv a \pmod n$ bármely a egészre. Igazolja.

72. Mutassa meg, hogy minden

$$n = (6k+1)(12k+1)(18k+1)$$

alaku egész abszolut pszeudoprím, ha mindhárom faktor prím; s így $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ egy abszolut pszeudoprím.

73. Wilson-tétele alapján adja meg, hogy

(a) milyen maradékot ad 15!, ha 17-tel osztjuk;

(b) milyen maradékot ad 2(26!), ha 29-cel osztjuk.

74. Döntse el annak alapján, hogy a $16! \equiv -1 \pmod{17}$ teljesül vagy nem, hogy 17 prímszám-e.

75. Rendezze el a $2, 3, 4, \cdots, 21$ egészeket a, b párokba úgy, hogy $ab \equiv 1 \pmod{23}$.

76. Legyen $n > 1$ egész.

(a) Bizonyítsa be, hogy n akkor és csak akkor prím, ha $(n-2)! \equiv 1 \pmod n$.

(b) $(n-1)! \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ )n$ valahányszor n összetett és $n \neq 4$.

77. Legyen p egy prímszám. Mutassa meg, hogy

$$(p-1)! \equiv p-1 \pmod{1+2+3+\cdots+(p-1)}.$$

78. Keressen két olyan $p \leq 13$ prímszámot amelyre fönnáll a $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$ kongruencia.

79. Wilson-tétele segítségével igazolja, hogy

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$

teljesül minden páratlan p prímre.

80. Igazolja az alábbi állításokat:

(a) Ha $p = 4k+3$ prím akkor

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv 1 \pmod p \text{ vagy } \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv -1 \pmod p;$$

és így $((p-1)/2))!$ megoldása az $x^2 \equiv 1 \pmod p$ kongruenciának.

(b) Az (a) rész fölhasználásával mutassa meg, hogy ha $p = 4k+3$ prím, akkor az összes p-nél kisebb páros szám szorzata kongruens ± 1-gyel modulo p. [Fermat-tétele alapján $2^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod p$].

81. Bizonyítsa be, hogy az n^2+1 alaku egészek páratlan prímosztói $4k+1$ alakúak. [Mikor oldható meg az $x^2 \equiv -1 \pmod p$ kongruencia?]

82. Ha p *és* $p+2$ ikerprímek, akkor

$$4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}.$$

Igazolja.

83. Keresse meg a 2, 3 és 5 multiplikatív rendjét: (a) modulo 17, (b) modulo 19, (c) modulo 23.

84. Igazolja az alábbi állításokat:

(a) Ha a rendje modulo p $2k$, ahol p páratlan prím, akkor $a^k \equiv -1 \pmod p$.

(b) Ha a rendje modulo n $n-1$, akkor n prímszám.

85. Legyen p páratlan prím, az a egész rendje modulo p pedig 3. Bizonyítsa be, hogy $a+1$ rendje modulo p szükségképp 6. [$a^2+a+1 \equiv 0 \pmod p$ alapján $(a+1)^2 \equiv a \pmod p$ és $(a+1)^3 \equiv -1 \pmod p$]

86. Igazolja a következő állításokat:

(a) Az n^2+1 minden páratlan prímosztója $4k+1$ alakú. [$n^2 \equiv -1 \pmod p$ ekkor, így $4|\varphi(p)$]

(b) n^4+1 páratlan prímosztói $8k+1$ alakúak.

(c) Az n^2+n+1 alakú egészek minden 3-tól különböző páratlan prímosztója $6k+1$ alakú.

87. Mutassa meg, hogy végtelen sok $4k+1$, $6k+1$, $8k+1$ alakú prímszám van. [pl. ha $p_1, p_2, \ldots, p_r$ az összes $4k+1$ alakú prím, akkor akalmazza az előző állítást $(2p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)^2+1$-re.]

88. Igazolja, hogy a 2 primitív gyök modulo 19, de modulo 17 már nem.

89. Legyen p egy páratlan prímszám. Mutassa meg, hogy

(a) az $x^2 \equiv 1 \pmod p$ kongruencia összes inkongruens megoldásai 1 és $p-1$.

(b) az $x^{p-2}+\ldots+x^2+x+1 \equiv 0 \pmod p$ kongruenciának pontosan $p-2$ inkongruens megoldása van, s ezek a $2, 3, \ldots, p-1$ egészek.

90. Tegyük föl, hogy r primitív gyök modulo p. Igazolja, hogy

(a) az $r^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$ kongruencia fönnáll.

(b) ha r' szintén egy primitív gyök modulo p, akkor rr' már nem primitív gyök.

(c) ha r' olyan egész, hogy $rr' \equiv 1 \pmod p$, akkor r' primitív gyök modulo p.

91. Legyen p páratlan prím és r egy primitív gyök modulo p. Bizonyítsa be, hogy

(a) ha $p \equiv 1 \pmod 4$, akkor $-r$ is egy primitív gyök.

(b) ha $p \equiv 3 \pmod 4$, akkor $-r$ rendje modulo p $(p-1)/2$.

92. Igazolja az alábbi állításokat:

(a) Ha n páratlan egész, akkor $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

(b) Ha n egy páros egész, akkor $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$.

(c) $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ akkor és csak akkor, ha $3|n$.

(d) $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$ pontosan akkor, ha $3 \nmid n$.

93. Igazolja, hogy a $\varphi(n) = \varphi(n+2)$ egyenlőség teljesül $n = 2(2p-1)$-re, valahányszor p és $2p-1$ prímszám.

94. Mutassa meg, hogy

(a) tetszőleges pozitív egész n-re $\frac{1}{2}\sqrt{n} \leq \varphi(n) \leq n$. [Ha $n = 2^{k_0} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, akkor $\varphi(n) = 2^{k_0-1} p_1^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r-1}(p_1-1) \cdot \ldots \cdot (p_r-1)$ és használja a $p-1 > \sqrt{p}$, valamint a $k - \frac{1}{2} \geq \frac{k}{2}$ egyenlőtlenségeket.]

(b) ha az $n > 1$ egésznek r különböző prímfaktora van, akkor $\varphi(n) \geq \frac{n}{2^r}$.

95. Bizonyítsa be, hogy ha n-nek r különböző páratlan prímfaktora van, akkor $2^r|\varphi(n)$.

96. Ha minden olyan prím amely osztója n-nek az m-nek is osztója, akkor $\varphi(nm) = n\varphi(m)$, speciálisan, $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$. Igazolja.

97. Mutassa meg, hogy $n \geq 1$ esetén $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

98. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\tau(n)$ pontosan akkor páratlan, ha n teljes négyzet.

(b) $\sigma(n)$ pontosan akkor páratlan, ha n teljes négyzet, vagy egy teljes négyzet kétszerese.

99. Mutassa meg, hogy bármely pozitív egész n-re $\sum\limits_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$.

100. Legyen n négyzetmentes szám. Mutassa meg, hogy $\tau(n) = 2^r$, ahol r az n különböző prímtényezői száma.

101. Legyen $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, ahol $p_i \neq p_j$, ha $i \neq j$. Igazolja, hogy

$$1 > \frac{n}{\sigma(n)} > \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

102. Legyen $k > 1$ egész. Mutassa meg, hogy végtelen sok olyan $n \in \mathbf{N}$ van amelyre $\tau(n) = k$, de csak véges sok olyan, amelyre $\sigma(n) = k$.

103. Bizonyítsa be, hogy ha n és $n+2$ prímek, akkor $\sigma(n+2) = \sigma(n) + 2$ és ez igaz $n = 434$ és 8575-re is.

104. Legyen $n \in \mathbf{N}$. Mutassa meg, hogy

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d)\right)^2$$

[Vegye észre, hogy az egyenlőség mindkét oldalán multiplikatív függvény szerepel.]

105. Legyen $x,\ y,\ z$ egy primitív pithagoraszi számhármas. Bizonyítsa be, hogy $x+y$ és $x-y$ 1 vagy 7-tel kongruensek modulo 8.

106. Igazolja, hogy bármely $x,\ y,\ z$ primitív pithagoraszi számhármasra $12|xy$ és $60|xyz$.

107. Határozza meg az összes olyan pithagoraszi számhármast, amely

(a) három egymás utáni egész szám.

(b) elemei számtani sorozatot alkotnak.

108. Mutassa meg, hogy ha $x,\ y,\ z$ olyan pithagoraszi számhármas amelyben $z-y=2$,

$$x=2t, \quad y=t^2-1, \quad z=t^2+1$$

valamilyen $t>1$ egészre.

109. Legyen $n\in\mathbf{N}$. Bizonyítsa be, hogy van olyan pithagoraszi számhármas, hogy az általa meghatározott háromszög beírt körének sugara n.

110. Mutassa meg, hogy végtelen sok olyan pithagoraszi számhármas van, amelyben az első két szám egymás utáni egész. [Ha $x,\ x+1,\ z$ pithagoraszi akkor $3x+2z+1,\ldots$ is az.]

111. Végtelen sok olyan pithagoraszi számhármas van, amelyben két egymás utáni háromszögszám szerepel.[Ha $x,\ x+1,\ z$ pithagoraszi számhármas, akkor tekintse a t_{2x}-szel kezdődő hármast.]

112. Oldja meg az alábbi kongruenciákat:

(a) $3x^2+5x-2\equiv 0 \pmod{12}$

(b) $14x^6-18x^5+31\equiv 0 \pmod{63}$

(c) $x^2+33x+18\equiv 0 \pmod{49}$

(d) $x^3+2x^2+28\equiv 0 \pmod{27}$

(e) $x^{19}+2x+1\equiv 0 \pmod{38}$

(f) $x^{99}-1\equiv 0 \pmod{8}$