

## FELADATOK A „FÉLCSOPORTOK, CSOPORTOK” TÉMAKÖRHÖZ

**6.1. Feladat.** Határozza meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak részfélcsoportot, illetve részcsoportot a megadott félcsoportban:

- (a) a  $V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  halmaz  $S_4$ -ben;
- (b) azon permutációk halmaza  $S_5$ -ben, amelyek a 2 elemet nem mozgatják;
- (c) azon permutációk halmaza  $S_5$ -ben, amelyek a 2 elemet mozgatják;
- (d) az  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  halmaz injektív transzformációinak halmaza  $T(X)$ -ben;
- (e)  $\mathbb{N}$  nem szürjektív transzformációinak halmaza  $T(\mathbb{N})$ -ben;
- (f)  $\mathbb{N}$  nem bijektív transzformációinak halmaza  $T(\mathbb{N})$ -ben;
- (g) az  $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 6\}$  halmaz  $(\mathbb{Z}; +)$ -ban;
- (h) a legalább négyjegyű pozitív egész számok halmaza  $(\mathbb{N}; \cdot)$ -ban;
- (i) a 0-ra végződő egész számok halmaza  $(\mathbb{Z}; \cdot)$ -ban;
- (j) a pozitív valós számok halmaza  $(\mathbb{R}; \cdot)$ -ban;
- (k) a negatív racionális számok halmaza  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ -ban;
- (l) a negatív racionális számok halmaza  $(\mathbb{Q}; +)$ -ban.

**6.2. Feladat.** Határozza meg a megadott  $G$  csoport  $A$  részhalmaza által  $G$ -ben generált részfélcsoportot, illetve részcsoportot:

- (a)  $G = S_4$ ,  $A = \{(123)\}$ ;
- (b)  $G = S_4$ ,  $A = \{\pi \in G \mid 4\pi = 4\}$ ;
- (c)  $G = S_5$ ,  $A = \{(12), (13), (14), (15)\}$ ;
- (d)  $G = (\mathbb{Z}_{12}; +)$ ,  $A = \{\overline{3}\}$ ;
- (e)  $G = (\mathbb{Z}_{12}; +)$ ,  $A = \{\overline{5}\}$ ;
- (f)  $G = (\mathbb{Z}_{12}; +)$ ,  $A = \{\overline{8}, \overline{10}\}$ ;
- (g)  $G = (R_{15}; \cdot)$ ,  $A = \{\overline{2}, \overline{7}\}$ ;
- (h)  $G = (\mathbb{Z}; +)$ ,  $A = \{1\}$ ;
- (i)  $G = (\mathbb{Z}; +)$ ,  $A = \{2, 3\}$ ;
- (j)  $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $A = \mathbb{N}$ ;
- (k)  $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $A = \mathbb{Q}^-$ ;
- (l)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $A = \{bi \mid b \in \mathbb{R}^+\}$ ;
- (m)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $A = \{i\}$ ;
- (n)  $G = ((\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + \overline{1})) \setminus \{\overline{0}\}; \cdot)$ ,  $A = \{\overline{x}\}$ .

**6.3. Feladat.** Adja meg a  $(\mathbb{Z}_3; +)$  és a  $V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$  csoportok Cayley-ábrázolását.

**6.4. Feladat.** Adja meg az alábbi félcsoportok reguláris ábrázolását, illetve kiterjesztett reguláris ábrázolását. Mely ábrázolások injektívek ezek közül?

- (a)  $(\{a, b\}; \cdot)$ , ahol  $x \cdot y = x$  teljesül az alaphalmaz tetszőleges  $x, y$  elemeire;
- (b)  $(\{a, b\}; \cdot)$ , ahol  $x \cdot y = y$  teljesül az alaphalmaz tetszőleges  $x, y$  elemeire;
- (c)  $(\{a, b, c\}; \cdot)$ , ahol  $x \cdot y = a$  teljesül az alaphalmaz tetszőleges  $x, y$  elemeire;
- (d)  $T(\{1, 2\})$ ;
- (e)  $C_{2,2}$ ;
- (f)  $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ , ahol  $x \cdot y = \max(x, y)$  teljesül az alaphalmaz tetszőleges  $x, y$  elemeire.

**6.5. Feladat.** Legyen  $C_{3,7} = [a]$  egy 3 indexű, 7 periódusú ciklikus félcsoport.

- (a) A generátorelem következő hatványai közül melyek egyenlőek és melyek nem egyenlőek egymással:  $a^{80}$ ,  $a^{92}$ ,  $a^{23}$ ,  $a^{701}$ ,  $a^{779}$ ,  $a^3$ ,  $a^9$ ,  $a^{44}$ ,  $a^{58}$ ,  $a$ ,  $a^{17}$ ,  $a^2$ ,  $a^8$ ,  $a^{70}$ ?
- (b) Végezze el a következő műveleteket  $C_{3,7}$ -ben:  $a^2 a^8$ ,  $(a^7)^{628}$ ,  $(a^6)^{1451}$ ,  $(a^4)^{10} (a^9)^5$ .
- (c) Adjon meg részcsoportot  $C_{3,7}$ -ben. Mi ennek a részcsoportnak az egységeleme? Van-e olyan eleme a részcsoportnak, amely generálja őt? Ha igen, akkor adja meg az összes ilyen elemet.
- (d) Megoldhatók-e  $C_{3,7}$ -ben a következő egyenletek? A megoldható egyenletek esetében adja meg az összes megoldást.
  - (d<sub>1</sub>)  $a^5 \cdot x^3 = a^2$ ;
  - (d<sub>2</sub>)  $a^6 \cdot x^3 = a^4$ ;

$$(d_3) a^5 \cdot x^3 = a^4.$$

**6.6. Feladat.** Határozza meg azokat a ciklikus félcsoportokat, amelyeknek van egységeleme, illetve azokat, amelyeknek van zéruseleme.

**6.7. Feladat.** Határozza meg a  $T(\{1, 2, 3, 4\})$  félcsoportban az

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

elem által generált ciklikus félcsoport indexét és periódusát.

**6.8. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi leképezések közül melyek homomorfizmusok, és melyek nem. A homomorfizmusok közül melyek izomorfizmusok, és melyek nem?

$$(a) (\mathbb{Z}; +) \rightarrow S_3, n \mapsto (1\ 2\ 3)^n;$$

$$(b) T(\{1, 2, 3\}) \rightarrow T(\{1, 2, 3\}), \varphi \mapsto \varphi \circ \varphi;$$

$$(c) T(\{1, 2\}) \rightarrow T(\{1, 2\}), \varphi \mapsto \varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) (R_{10}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_4; +), \overline{3^n} \mapsto \overline{n} \ (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$(e) (R_{10}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_4; +), \overline{3^n} \mapsto \overline{2n} \ (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$(f) (R_{10}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_8; +), \overline{3^n} \mapsto \overline{n^3} \ (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$(g) (\mathbb{Z}_{10}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{10}; +), \overline{k} \mapsto \overline{5};$$

$$(h) (\mathbb{Z}_{12}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_8; +), \overline{k} \mapsto \overline{2k};$$

$$(i) (\mathbb{Z}_{12}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_4; +), \overline{k} \mapsto \overline{3k};$$

$$(j) (\mathbb{Q}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), x \mapsto 3x + 7i;$$

$$(k) (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), x \mapsto 2x - 5xi;$$

$$(l) (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x + iy \mapsto y;$$

$$(m) (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+; \cdot), x \mapsto \sqrt{x};$$

$$(n) (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot), k \mapsto \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7};$$

$$(o) (\mathbb{N}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{N}; \cdot), n \mapsto 1;$$

$$(p) (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto \log_2 x;$$

$$(q) (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{Q}; +), x \mapsto x - 1;$$

$$(r) (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), x + iy \mapsto (2x + 6y) + (4x - 10y)i;$$

$$(s) (\mathbb{R}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), x \mapsto x^{15};$$

$$(t) (\mathbb{Z}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{N}_0; \cdot), x \mapsto |x|;$$

$$(u) (\mathbb{R}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), x \mapsto \sin x;$$

$$(v) (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; \cdot), x + iy \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x - iy};$$

$$(w) (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \mapsto \varphi, \text{ ahol } \varphi \in \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r < 2\pi\}.$$

**6.9. Feladat.** Adott az  $F_{\{x\}}$  szabad félcsoport, és az  $(\mathbb{N}; +)$  félcsoport. Határozza meg azokat a  $\varphi$  homomorfizmusokat, amelyekre  $\varphi: F_{\{x\}} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x\varphi = 1$ . Hány ilyen homomorfizmus van?

Van-e  $F_{\{x\}}$ -ből  $(\mathbb{N}; +)$ -ba olyan  $\psi$  homomorfizmus, amelyre  $x\psi \neq 1$ ? Ha van, akkor adjon is meg egy ilyen.

**6.10. Feladat.** Adott az  $F_{\{x,y\}}$  szabad félcsoport és az  $A = (\{a, b\}; \cdot)$  félcsoport, melyben az alaphalmaz bármely  $u, v$  elemére

$$(a) u \cdot v = a;$$

$$(b) u \cdot v = u$$

teljesül. Adj meg azt a  $\varphi: F_{\{x,y\}} \rightarrow A$  homomorfizmust, amelyre  $x\varphi = a$ ,  $y\varphi = b$ .

**6.11. Feladat.** Az inverziók számának meghatározásával döntse el, hogy az alábbi  $S_6$ -beli permutációk közül melyek párosak, és melyek páratlanok.

$$(a) \text{id};$$

$$(b) (1\ 4\ 2);$$

$$(c) (6\ 2)(5\ 3\ 1);$$

$$(d) (1\ 3)(2\ 6)(5\ 4);$$

$$(e) (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6);$$

$$(f) (1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6).$$

**6.12. Feladat.** Transzpozíciókra bontás segítségével döntse el, hogy az alábbi  $S_6$ -beli permutációk közül melyek párosak, és melyek páratlanok.

$$(a) \text{id};$$

$$(b) (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6);$$

$$(c) (1\ 5)(2\ 3);$$

$$(d) (1\ 2)(3\ 5)(2\ 3)(4\ 5);$$

$$(e) (1\ 6\ 4)(2\ 5\ 3);$$

$$(f) ((1\ 5)(2\ 4\ 6\ 3))^{2004};$$

$$(g) ((2\ 4\ 3)(6\ 5))^{2004^{2003^{2004}} + 2003^{2004^{2003}}}.$$