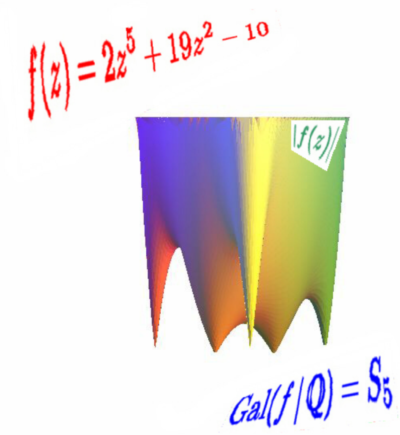
Utazások a "számítógépes matematika" világában

Dormán Miklós

SZTE, Bolyai Intézet

2006. december 2.



1. ábra: Az $f(z) = |2z^5 + 19z^2 - 10|$ függvény grafikonja.

Miért érdemes használni a számítógépet?

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)
  - GAP (csoportelmélet)

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
    - CAMAL (égi mechanika)
    - GAP (csoportelmélet)
    - KANT (számelmélet)

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)
  - GAP (csoportelmélet)
  - KANT (számelmélet)
  - STENSOR (általános relativitás)

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)
  - GAP (csoportelmélet)
  - KANT (számelmélet)
  - STENSOR (általános relativitás)
  - stb.

Bevezetés

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)
  - GAP (csoportelmélet)
  - KANT (számelmélet)
  - STENSOR (általános relativitás)
  - stb.
- Általános célokra:

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)
  - GAP (csoportelmélet)
  - KANT (számelmélet)
  - STENSOR (általános relativitás)
  - stb.
- Általános célokra:
  - MAPLE

Miért érdemes használni a számítógépet?

- Mert gyorsan számol.
- Mert pontosan számol.
- Mert soha nem unja meg a számolást.

Számítógépes algebrai rendszerek.

- Speciális célokra:
  - CAMAL (égi mechanika)
  - GAP (csoportelmélet)
  - KANT (számelmélet)
  - STENSOR (általános relativitás)
  - stb.
- Általános célokra:
  - MAPLE
  - stb.

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c *valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az* $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *egyenlet gyökei rendre egyenlők az* $x^3 - 3x + 1 = 0$ *egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.*

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c *valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az* $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *egyenlet gyökei rendre egyenlők az* $x^3 - 3x + 1 = 0$ *egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.*

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$> \; V1 := x^3 - 3*x + 1 = (x-u)*(x-v)*(x-w);$

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

$> V2 := expand(rhs(V1) - lhs(V1));$

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

$> V2 := expand(rhs(V1) - lhs(V1));$

$$V2 := -x^2\,w - x^2\,v + x\,v\,w - u\,x^2 + u\,x\,w + u\,v\,x - u\,v\,w + 3\,x - 1$$

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

$> V2 := expand(rhs(V1) - lhs(V1));$

$$V2 := -x^2\,w - x^2\,v + x\,v\,w - u\,x^2 + u\,x\,w + u\,v\,x - u\,v\,w + 3\,x - 1$$

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

$> V2 := expand(rhs(V1) - lhs(V1));$

$$V2 := -x^2\,w - x^2\,v + x\,v\,w - u\,x^2 + u\,x\,w + u\,v\,x - u\,v\,w + 3\,x - 1$$

$> V3 := collect(V2, x);$

Feladatok megoldása.

B. 3608.

Adjuk meg azoknak az a, b, c valós számoknak a tízes számrendszerbeli alakját, amelyekre az $ax^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei rendre egyenlők az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet három gyökének az ötödik hatványával.

$$> V1 := x^3 - 3 * x + 1 = (x - u) * (x - v) * (x - w);$$

$$V1 := x^3 - 3\,x + 1 = (x - u)\,(x - v)\,(x - w)$$

$$> V2 := expand(rhs(V1) - lhs(V1));$$

$$V2 := -x^2\,w - x^2\,v + x\,v\,w - u\,x^2 + u\,x\,w + u\,v\,x - u\,v\,w + 3\,x - 1$$

$$> V3 := collect(V2, x);$$

$$V3 := (-v - u - w)\,x^2 + (u\,v + 3 + u\,w + v\,w)\,x - 1 - u\,v\,w$$

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

> $V4 := coeffs(V3, x);$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$

Feladatok megoldása.

$> \; V4 := coeffs(V3, x);$

$$V4 := -1 - u\,v\,w,\; u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\; -v - u - w$$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

Feladatok megoldása.

$$> \; V4 := coeffs(V3, x);$$

$$V4 := -1 - u\,v\,w,\; u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\; -v - u - w$$

$$> \; V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$$

$$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\; u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\; -v - u - w = 0\}$$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\ -v - u - w = 0\}$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\ -v - u - w = 0\}$

$> W1 := x^3 + a * x^2 + b * x + c = (x - u^5) * (x - v^5) * (x - w^5);$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\ -v - u - w = 0\}$

$> W1 := x^3 + a * x^2 + b * x + c = (x - u^5) * (x - v^5) * (x - w^5);$

$W1 := x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = (x - u^5)\,(x - v^5)\,(x - w^5)$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

$$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\ -v - u - w = 0\}$$

$> W1 := x^3 + a * x^2 + b * x + c = (x - u^5) * (x - v^5) * (x - w^5);$

$$W1 := x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = (x - u^5)\,(x - v^5)\,(x - w^5)$$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

$$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\ -v - u - w = 0\}$$

$> W1 := x^3 + a * x^2 + b * x + c = (x - u^5) * (x - v^5) * (x - w^5);$

$$W1 := x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = (x - u^5)\,(x - v^5)\,(x - w^5)$$

$> W2 := expand(rhs(W1) - lhs(W1));$

Feladatok megoldása.

$> V4 := coeffs(V3, x);$

$$V4 := -1 - u\,v\,w,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w,\ -v - u - w$$

$> V5 := \{seq(V4[i] = 0, i = 1..3)\};$

$$V5 := \{-1 - u\,v\,w = 0,\ u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\ -v - u - w = 0\}$$

$> W1 := x^3 + a * x^2 + b * x + c = (x - u^5) * (x - v^5) * (x - w^5);$

$$W1 := x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = (x - u^5)\,(x - v^5)\,(x - w^5)$$

$> W2 := expand(rhs(W1) - lhs(W1));$

$$W2 := -x^2\,w^5 - x^2\,v^5 + x\,v^5\,w^5 - u^5\,x^2 + u^5\,x\,w^5 + u^5\,v^5\,x - u^5\,v^5\,w^5 - a\,x^2 - b\,x - c$$

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$> W3 := collect(W2, x);$

$$W3 := (-u^5 - a - w^5 - v^5)\,x^2 + (u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5)\,x - c - u^5\,v^5\,w^5$$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$$W3 := (-u^5 - a - w^5 - v^5)\,x^2 + (u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5)\,x - c - u^5\,v^5\,w^5$$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$W3 :=$
$(-u^5 - a - w^5 - v^5)\, x^2 + (u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5)\, x - c - u^5\, v^5\, w^5$

$> W4 := coeffs(W3, x);$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$$W3 := (-u^5 - a - w^5 - v^5)\,x^2 + (u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5)\,x - c - u^5\,v^5\,w^5$$

$> W4 := coeffs(W3, x);$

$$W4 := -c - u^5\,v^5\,w^5,\ u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5,\ -u^5 - a - w^5 - v^5$$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$W3 :=$
$(-u^5 - a - w^5 - v^5)\, x^2 + (u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5)\, x - c - u^5\, v^5\, w^5$

$> W4 := coeffs(W3, x);$

$W4 := -c - u^5\, v^5\, w^5,\ u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5,\ -u^5 - a - w^5 - v^5$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$W3 :=$
$(-u^5 - a - w^5 - v^5)\, x^2 + (u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5)\, x - c - u^5\, v^5\, w^5$

$> W4 := coeffs(W3, x);$

$W4 := -c - u^5\, v^5\, w^5,\ u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5,\ -u^5 - a - w^5 - v^5$

$> V5;$

Feladatok megoldása.

$$> W3 := collect(W2, x);$$

$$W3 :=$$
$$(-u^5 - a - w^5 - v^5)\,x^2 + (u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5)\,x - c - u^5\,v^5\,w^5$$

$$> W4 := coeffs(W3, x);$$

$$W4 := -c - u^5\,v^5\,w^5,\; u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5,\; -u^5 - a - w^5 - v^5$$

$$> V5;$$

$$\{-1 - u\,v\,w = 0,\; u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\; -v - u - w = 0\}$$

Feladatok megoldása.

$$> W3 := collect(W2, x);$$

$$W3 := (-u^5 - a - w^5 - v^5)\, x^2 + (u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5)\, x - c - u^5\, v^5\, w^5$$

$$> W4 := coeffs(W3, x);$$

$$W4 := -c - u^5\, v^5\, w^5,\ u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5,\ -u^5 - a - w^5 - v^5$$

$$> V5;$$

$$\{-1 - u\, v\, w = 0,\ u\, v + 3 + u\, w + v\, w = 0,\ -v - u - w = 0\}$$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$$W3 := (-u^5 - a - w^5 - v^5)\,x^2 + (u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5)\,x - c - u^5\,v^5\,w^5$$

$> W4 := coeffs(W3, x);$

$$W4 := -c - u^5\,v^5\,w^5,\; u^5\,w^5 - b + u^5\,v^5 + v^5\,w^5,\; -u^5 - a - w^5 - v^5$$

$> V5;$

$$\{-1 - u\,v\,w = 0,\; u\,v + 3 + u\,w + v\,w = 0,\; -v - u - w = 0\}$$

$> simplify(W4[1] = 0, V5); simplify(W4[2] = 0, V5);$
$simplify(W4[3] = 0, V5);$

Feladatok megoldása.

$> W3 := collect(W2, x);$

$W3 :=$
$(-u^5 - a - w^5 - v^5)\, x^2 + (u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5)\, x - c - u^5\, v^5\, w^5$

$> W4 := coeffs(W3, x);$

$W4 := -c - u^5\, v^5\, w^5,\ u^5\, w^5 - b + u^5\, v^5 + v^5\, w^5,\ -u^5 - a - w^5 - v^5$

$> V5;$

$\{-1 - u\, v\, w = 0,\ u\, v + 3 + u\, w + v\, w = 0,\ -v - u - w = 0\}$

$> simplify(W4[1] = 0, V5); simplify(W4[2] = 0, V5);$
$simplify(W4[3] = 0, V5);$

$-c + 1 = 0,\ -b - 198 = 0\ \ -a + 15 = 0$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1;\ W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1; W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

$$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1; W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

$$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1;\ W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$

$> Mo := [fsolve(V, x)];\ map(x- > x^5, Mo);$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1;\ W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$

$> Mo := [fsolve(V, x)];\ map(x- > x^5, Mo);$

$Mo := [-1.879385242, 0.3472963553, 1.532088886],$
$[-23.44655609, 0.005052439574, 8.441503614]$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1;\ W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$

$> Mo := [fsolve(V, x)];\ map(x- > x^5, Mo);$

$Mo := [-1.879385242, 0.3472963553, 1.532088886],$
$[-23.44655609, 0.005052439574, 8.441503614]$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3*x + 1;\ W := x^3 + 15*x^2 - 198*x + 1;$

$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$

$> Mo := [fsolve(V, x)];\ map(x- > x^5, Mo);$

$Mo := [-1.879385242,\ 0.3472963553,\ 1.532088886],$
$[-23.44655609,\ 0.005052439574,\ 8.441503614]$

$> fsolve(W, x);$

Feladatok megoldása.

Megoldás: $a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

$> V := x^3 - 3 * x + 1;\ W := x^3 + 15 * x^2 - 198 * x + 1;$

$V := x^3 - 3\,x + 1,\ \ W := x^3 + 15\,x^2 - 198\,x + 1$

$> Mo := [fsolve(V, x)];\ map(x- > x^5, Mo);$

$Mo := [-1.879385242, 0.3472963553, 1.532088886],$
$[-23.44655609, 0.005052439574, 8.441503614]$

$> fsolve(W, x);$

$[-23.44655606, 0.005052439577, 8.441503621]$

B. 3626.

Az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *sorozat első két tagja pozitív, és fennáll, hogy* $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}+1}{x_n}$. *Fejezzük ki a sorozat 2003-adik tagját* x_0 *és* x_1 *segítségével.*

Feladatok megoldása.

$$P := proc(n)$$
$$local\ i, L;$$
$$L := [x[0], x[1]] :$$
$$for\ i\ from\ 3\ to\ n$$
$$do$$
$$L := [op(L), simplify((L[i-1]+1)/L[i-2])] :$$
$$od :$$
$$RETURN(L) :$$
$$end :$$

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}\right]$$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}\right]$$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}]$$

$> P(4);$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}]$$

$> P(4);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1}]$$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}]$$

$> P(4);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1}]$$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}]$$

$> P(4);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1}]$$

$> P(5);$

Feladatok megoldása.

$> P(3);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0}\right]$$

$> P(4);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1}\right]$$

$> P(5);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\ \frac{1+x_0}{x_1}\right]$$

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

$> P(6);$

Feladatok megoldása.

$> P(6);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\ \frac{1+x_0}{x_1},\ x_0\right]$$

Feladatok megoldása.

$> P(6);$

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\ \frac{1+x_0}{x_1},\ x_0\right]$$

Feladatok megoldása.

> $P(6)$;

$$\left[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\ \frac{1+x_0}{x_1},\ x_0\right]$$

> $P(7)$;

Feladatok megoldása.

> $P(6)$;

$$\left[x_0,\, x_1,\, \frac{x_1+1}{x_0},\, \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\, \frac{1+x_0}{x_1},\, x_0\right]$$

> $P(7)$;

$$\left[x_0,\, x_1,\, \frac{x_1+1}{x_0},\, \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\, \frac{1+x_0}{x_1},\, x_0,\, x_1\right]$$

Feladatok megoldása.

$> P(6);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\ \frac{1+x_0}{x_1},\ x_0]$$

$> P(7);$

$$[x_0,\ x_1,\ \frac{x_1+1}{x_0},\ \frac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1},\ \frac{1+x_0}{x_1},\ x_0,\ x_1]$$

Megoldás: a sorozat 2003-adik tagja az $x_{2003} = \dfrac{x_0+x_1+1}{x_0\,x_1}$.

B. 3654.

Igazoljuk, hogy $m^2 + n^2 + m + n - 1$ *semmilyen* m *és* n *egész számra sem osztható* 9*-cel.*

Feladatok megoldása.

B. 3654.

Igazoljuk, hogy $m^2 + n^2 + m + n - 1$ *semmilyen* m *és* n *egész számra sem osztható* 9*-cel.*

Feladatok megoldása.

B. 3654.

Igazoljuk, hogy $m^2 + n^2 + m + n - 1$ *semmilyen* m *és* n *egész számra sem osztható* 9*-cel.*

$$> f := k- > matrix(k, k, (m, n)- > (m-1)^2 + (n-1)^2 + (m-1) + (n-1) - 1 \; mod \; 9);$$

Feladatok megoldása.

B. 3654.

Igazoljuk, hogy $m^2 + n^2 + m + n - 1$ *semmilyen* m *és* n *egész számra sem osztható* 9*-cel.*

$> f := k- > matrix(k, k, (m, n)- >$
$(m-1)^2 + (n-1)^2 + (m-1) + (n-1) - 1\ mod\ 9);$

$$f := k \to matrix(k,\ k,\ (m,\ n) \to ((m-1)^2 + (n-1)^2 + m - 3 + n) \bmod 9)$$

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

> $f(9);$

Feladatok megoldása.

> $f(9)$;

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 3 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 8 & 7 & 8 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 3 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 8 & 7 & 8 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 3 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Feladatok megoldása.

B. 3740.

Tekintsük az

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} - a_{n-1}$$

rekurzióval meghatározott sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan n pozitív egész, amelyre $a_n > 0,9999$.

Feladatok megoldása.

$Digits := 15:$

$P := proc(n)$

$local\ i, L;$

$L := [1, 1/3]:$

$for\ i\ from\ 3\ to\ n$

$\quad do$

$\quad L := [op(L), (2/3) * L[i-1] - L[i-2]]:$

$\quad od:$

$RETURN(L[n]):$

$end:$

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

$> \; for \; i \; from \; 2 \; by \; 1 \; while \; (P(i) < 0.9999) \; do \; od : \; i;$

Feladatok megoldása.

$> \textit{for } i \textit{ from } 2 \textit{ by } 1 \textit{ while } (P(i) < 0.9999) \textit{ do od} : \ i;$

246

Feladatok megoldása.

$> \mathit{for}\ i\ \mathit{from}\ 2\ \mathit{by}\ 1\ \mathit{while}\ (P(i) < 0.9999)\ \mathit{do}\ \mathit{od} :\ i;$

246

Feladatok megoldása.

$> \mathit{for}\ i\ \mathit{from}\ 2\ \mathit{by}\ 1\ \mathit{while}\ (P(i) < 0.9999)\ \mathit{do}\ \mathit{od}:\ i;$

246

$> P(246){:}\ \mathit{evalf}(P(246));$

Feladatok megoldása.

$> \mathit{for}\ i\ \mathit{from}\ 2\ \mathit{by}\ 1\ \mathit{while}\ (P(i) < 0.9999)\ \mathit{do}\ \mathit{od}:\ i;$

246

$> P(246):\ \mathit{evalf}(P(246));$

0.999969286984420

Feladatok megoldása.

$> for\ i\ from\ 2\ by\ 1\ while\ (P(i) < 0.9999)\ do\ od:\ i;$

246

$> P(246):\ evalf(P(246));$

0.999969286984420

Megoldás: a legkisebb megfelelő index a 246.

Feladatok megoldása.

$> \ for \ i \ from \ 2 \ by \ 1 \ while \ (P(i) < 0.9999) \ do \ od : \ i;$

246

$> \ P(246): \ evalf(P(246));$

0.999969286984420

Megoldás: a legkisebb megfelelő index a 246.

Feladatok megoldása.

$> for\ i\ from\ 2\ by\ 1\ while\ (P(i) < 0.9999)\ do\ od: \ i;$

246

$> P(246):\ evalf(P(246));$

0.999969286984420

Megoldás: a legkisebb megfelelő index a 246.

$> rsolve(\{a(n) = 2 * a(n-1)/3 - a(n-2), a(0) = 1, a(1) = 1/3\}, a);$

Feladatok megoldása.

$> \mathit{for}\ i\ \mathit{from}\ 2\ \mathit{by}\ 1\ \mathit{while}\ (P(i) < 0.9999)\ \mathit{do}\ \mathit{od}:\ i;$

246

$> P(246):\ \mathit{evalf}(P(246));$

0.999969286984420

Megoldás: a legkisebb megfelelő index a 246.

$> \mathit{rsolve}(\{a(n) = 2 * a(n-1)/3 - a(n-2), a(0) = 1, a(1) = 1/3\}, a);$

$$\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, i\, \sqrt{2}\right)^n}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\, i\, \sqrt{2}\right)^n}{2}$$

Feladatok megoldása.

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x + y = 1$. Határozzuk meg az $A(x, y) = x^4 y + x y^4 + x^3 y + x y^3 + x^2 y + x y^2$ kifejezés legnagyobb értékét.

Feladatok megoldása.

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x + y = 1$. Határozzuk meg az $A(x, y) = x^4\,y + x\,y^4 + x^3\,y + x\,y^3 + x^2\,y + x\,y^2$ kifejezés legnagyobb értékét.

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x + y = 1$. Határozzuk meg az $A(x, y) = x^4\,y + x\,y^4 + x^3\,y + x\,y^3 + x^2\,y + x\,y^2$ kifejezés legnagyobb értékét.

$> A := (x, y) -> x^4 * y + x * y^4 + x^3 * y + x * y^3 + x^2 * y + x * y^2;$

Feladatok megoldása.

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x + y = 1$. Határozzuk meg az $A(x, y) = x^4\, y + x\, y^4 + x^3\, y + x\, y^3 + x^2\, y + x\, y^2$ kifejezés legnagyobb értékét.

$$> A := (x, y)- > x^4 * y + x * y^4 + x^3 * y + x * y^3 + x^2 * y + x * y^2;$$

$$A := (x,\, y) \rightarrow x^4\, y + x\, y^4 + x^3\, y + x\, y^3 + x^2\, y + x\, y^2$$

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x + y = 1$. Határozzuk meg az $A(x, y) = x^4 y + x y^4 + x^3 y + x y^3 + x^2 y + x y^2$ kifejezés legnagyobb értékét.

$> A := (x, y)- > x^4 * y + x * y^4 + x^3 * y + x * y^3 + x^2 * y + x * y^2;$

$$A := (x,\ y) \to x^4 y + x y^4 + x^3 y + x y^3 + x^2 y + x y^2$$

Feladatok megoldása.

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x+y=1$. Határozzuk meg az $A(x,y)=x^4\,y+x\,y^4+x^3\,y+x\,y^3+x^2\,y+x\,y^2$ kifejezés legnagyobb értékét.

$> A := (x,y)->x^4*y+x*y^4+x^3*y+x*y^3+x^2*y+x*y^2;$

$$A := (x,\ y) \to x^4\,y+x\,y^4+x^3\,y+x\,y^3+x^2\,y+x\,y^2$$

$> Ay := simplify(A(x,y),\{x+y=1\});$

Feladatok megoldása.

B. 3604.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x + y = 1$*. Határozzuk meg az* $A(x, y) = x^4\, y + x\, y^4 + x^3\, y + x\, y^3 + x^2\, y + x\, y^2$ *kifejezés legnagyobb értékét.*

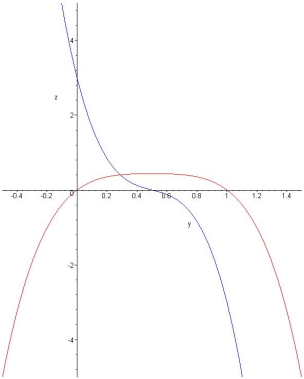
$$> A := (x, y) - > x^4 * y + x * y^4 + x^3 * y + x * y^3 + x^2 * y + x * y^2;$$

$$A := (x,\ y) \rightarrow x^4\, y + x\, y^4 + x^3\, y + x\, y^3 + x^2\, y + x\, y^2$$

$$> Ay := simplify(A(x, y), \{x + y = 1\});$$

$$Ay := -5\, y^4 + 10\, y^3 - 8\, y^2 + 3\, y$$

$plot([Ay, diff(Ay, y)], y = -0.5..1.5, z = -5..5, color = [red, blue]);$



2. ábra: Az Ay függvény és deriváltjának grafikonjai.

Feladatok megoldása.

Feladatok megoldása.

$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$

Feladatok megoldása.

$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$

$$A := -5\,(u + \frac{1}{2})^4 + 10\,(u + \frac{1}{2})^3 - 8\,(u + \frac{1}{2})^2 + 3\,u + \frac{3}{2}$$

Feladatok megoldása.

$$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$$

$$A := -5\,(u + \frac{1}{2})^4 + 10\,(u + \frac{1}{2})^3 - 8\,(u + \frac{1}{2})^2 + 3\,u + \frac{3}{2}$$

Feladatok megoldása.

$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$

$$A := -5\,(u + \frac{1}{2})^4 + 10\,(u + \frac{1}{2})^3 - 8\,(u + \frac{1}{2})^2 + 3\,u + \frac{3}{2}$$

$> expand(Au);$

Feladatok megoldása.

$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$

$$A := -5\,(u + \frac{1}{2})^4 + 10\,(u + \frac{1}{2})^3 - 8\,(u + \frac{1}{2})^2 + 3\,u + \frac{3}{2}$$

$> expand(Au);$

$$-5\,u^4 - \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{7}{16}$$

Feladatok megoldása.

$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$

$$A := -5\,(u + \frac{1}{2})^4 + 10\,(u + \frac{1}{2})^3 - 8\,(u + \frac{1}{2})^2 + 3\,u + \frac{3}{2}$$

$> expand(Au);$

$$-5\,u^4 - \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{7}{16}$$

$$-5\,u^4 - \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{7}{16} = -5\,(u^2 + \frac{1}{20})^2 + \frac{9}{20}$$

Feladatok megoldása.

$> Au := subs(y = u + 1/2, Ay);$

$$A := -5\,(u + \frac{1}{2})^4 + 10\,(u + \frac{1}{2})^3 - 8\,(u + \frac{1}{2})^2 + 3\,u + \frac{3}{2}$$

$> expand(Au);$

$$-5\,u^4 - \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{7}{16}$$

$$-5\,u^4 - \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{7}{16} = -5\,(u^2 + \frac{1}{20})^2 + \frac{9}{20}$$

Megoldás: a kifejezés legkisebb értéke a $\frac{7}{16}$.