Másodfokú egyenletekre vezető feladatok Hammurapi korából

(Kr.e. XVIII. század)

Klukovits Lajos

SZTE Bolyai Intézet

A legtöbb tudományban az egymást követő generációk lerombolják azt, amit elődeik építettek. A matematika az egyetlen, amelyben minden egyes generáció új értelmet illeszt a régi struktúrához. (H. Hankel)

2005. december 10.

Az ókori folyammenti kultúrák matematikája.

- Egyiptom: a Kr. II. évezred elejétől,
- India: a Kr. II. évezred második felétől,
- Kína: a Kr. I. évezredből,
- Mezopotámia: a Kr. II. évezred elejétől
  vannak (ismerünk) matematikai eredmények(et).

- Egyiptom: gyakorlati számítások (csak lineáris problémák), a csonkagúla térfogata.
- India: oltárkonstrukcióban pitagoraszi számhármasok.
- Kína: gyakorlati számítások, lineáris egyenletrendszerek, másodfokú problémák.
- Mezopotámia: pitagoraszi számhármasok, kamatos kamat, másodfokú problémák, algoritmus a négyzetgyök kiszámítására (az utolsó kettőt részletezük).

A kor matematikájának jellege: tisztán empírikus, nem fogalmaztak meg általános elveket, minden esetben konkrét numerikus problémát oldottak meg. **DE...**
Másodfokú egyenletekre vezető problémák.

1. Feladat (amely egy Szenkereh mellett talált agyagtáblán olvasható).

Hosszúság és szélesség. A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadtam a területhez, és $3,3$[*-at kaptam*]. *Hosszúság és szélesség összeadva pedig* 27. *Mi a hosszúság, szélesség, terület?*

27	$3,3$	*az összegek*
15		*a hosszúság*
12		*a szélesség*
$3,0$		*a terület*

Eljárásod ez legyen: 27*-et, a hosszúság és a szélesség összegét* $3,3$*-hoz add hozzá;* $3,30$ [*az eredmény*]. 2*-t a* 27*-hez add hozzá;* 29 [*az eredmény*]. 29*-ből letöröd a felét;* $14;30$*-szor* $14;30$ [*az*] $3,30;15$. *Levonsz* $3,30$*-at* $3,30;15$*-ből;* $0;15$ *a különbség.* $0;15$ *négyzetgyöke* $0;30$. *Az első* $14;30$*-hoz add hozzá a* $0;30$*-at: a hosszúság* 15. $0;30$*-at a második* $14;30$*-ból kivonsz: a szélesség* 14. *Azt a* 2*-t, amit a* 27*-hez hozzáadtál,* 14*-ből, a szélességből levonod:* 12 *a végleges szélesség. A* 15 *hosszúságot és a* 12 *szélességet összeszoroztam.* 15*-ször* 12 [*az*] $3,0$ [*ennyi a*] *terület.*
A 15 *hosszúság a* 12 *szélességen mennyivel nyúlik túl?* 3[*-mal*] *haladja meg.* 3*-at a* $3,0$*-hoz, a területhez adj hozzá:* $3,3$[*-at kapsz*].

Elemzés. Világos, hogy ha a hosszúságot és a szélességet x, y jelöli, akkor az

$$xy + x - y = 3,3$$
$$x + y = 27$$

egyenletrendszert kellene megoldani. A számolás második lépéséből látszik, hogy az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélességet vezet be, igy az

$$xy' = 3,30$$
$$x + y' = 29$$

egyenletrendszert oldja meg a következőképp. (A jobb áttekinthetőség kedvéért egymás mellett szerepeltetjük az eredeti szöveges megoldás lépéseit és a mai szimbolikus számolást.)

$$
\begin{array}{ll}
27+3,3=3,30 & xy'=3,30 \\
2+27=29 & x+y'=29 \\
29:2=14;30 & \dfrac{x+y'}{2}=14;30 \\
14;30\times 14;30=3,30;15 & \left(\dfrac{x+y'}{2}\right)^2=3,30;15 \\
3,30;15-3,30=0;15 & \left(\dfrac{x+y'}{2}\right)^2-xy'=0;15 \\
\sqrt{0;15}=0;30 & \sqrt{\left(\dfrac{x+y'}{2}\right)^2-xy'}=\dfrac{x-y'}{2}=0;30 \\
14;30+0;30=15 & \dfrac{x+y'}{2}+\dfrac{x-y'}{2}=x=15 \\
14;30-0;30=14 & \dfrac{x+y'}{2}-\dfrac{x-y'}{2}=y'=14 \\
14-2=12 & y'-2=y=12
\end{array}
$$

Összegezve. Egy

$$
\begin{aligned}
xy &= P \\
x+y &= a
\end{aligned}
$$

alakú egyenletrendszert úgy oldottak meg, hogy bevezettek egy új w határozatlant (a két eredeti határozatlan számtani közepétől való eltérést), amelynek révén egyhatározatlanossá vált a probléma:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}a+w \\
y &= \frac{1}{2}a-w, \qquad w=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2-P}.
\end{aligned}
$$

A kapott

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2-P} \\
y &= \frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2-P}
\end{aligned}
$$

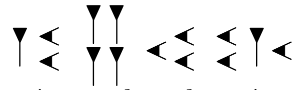
megoldásból sejthető, hogy egyrészt ismerték az

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \tag{2}$$

azonosságokat, amelyre bizonyítékul szolgálnak a további feladatok is, másrészt tudniuk kellett négyzetgyököt vonni.

A Yale Egyetemen mezopotámiai gyűjteményének egyik agyagtábláján található a következő jelsorozat. A tábla az Óbabiloni Birodalom korából származik.



E jelsorozat a következő hatvanas számrendszerben írt számot rejti:

$$1;24,51,10$$

Átírva 10-es számrendszerre a

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421\overline{296}$$

számot kapjuk, amely a $\sqrt{2}$-re emlékeztet. Ugyanis,
egy mai számítógép beépített kalkulátora a $\sqrt{2}$-re következő értéket adja:

$$\mathbf{1},4142135623730950488016887242097$$

míg egy 9 jeggyel dolgozó zsebkalkulátorral számolva a

$$\mathbf{1},4142135$$

értékhez jutunk. Az eltérés az $1,41421\overline{296}$ számtól abszolút értékben mindkét esetben kisebb $6 \cdot 10^{-7}$-nél, ami döbbenetes pontosság.

Az agyagtáblák arra is választ adnak, hogyan számolták ki ezen meglepően pontos értéket, de erről kicsit később.

2. Feladat. *Kivontam a négyzetet* [a négyzet oldalát] *a területéből és az* 14, 30.

Az agyagtáblán e feladat megoldása a következő.

> *Vedd az 1-et* [*az együtthatót*] *és osszad két részre. A* 0; 30*-at szorozd önmagával, az* 0; 15*. Ezt add hozzá a* 14, 30*-hoz. A* 14, 30; 15 [*négyzet*]*gyöke* 29; 30*. Ezt add hozzá a* 0; 30*-hoz, amit önmagával szoroztál. Ez* 30*, ami a négyzet* [*oldala*].

Elemzés. Az $x^2 - x = 14,30$ egyenletet, $x^2 - ax = b$ alakút, kell megoldani. A szöveg szerint az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították.
Oldjuk meg egyenletünket a tábla szövege szerint.

$$\begin{aligned}
x^2 - x &= 14,30 \\
x^2 - x + 0;15 &= 14,30 + 0;15 = 14,30;15 \\
(x - 0;30)^2 &= 14,30;15 \\
x - 0;30 &= 29;30 \\
x &= 30.
\end{aligned}$$

Most végezzük el az előbbi számolást szimbólikusan is.

$$\begin{aligned}
x^2 - ax &= b \\
x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 &= b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
x - \frac{a}{2} &= \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\
x &= \frac{a}{2} + \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Látható, hogy a másodfokú egyenletek jól ismert gyökképletét kaptuk meg. Az eljárás is ugyanaz, ahogy ma azt levezetjük.
Mit kellett ehhez tudniuk?
1. Az $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ azonosságot.
2. Azt a módszert, amit mi „mérlegelvnek” nevezünk.

Az elsőn kevésbé csodálkozunk, igen gyakran alkalmazták, de a második??? Erről az 1930-as évekig úgy vélték, hogy először a Kr.u. VIII. században, mintegy 2500 évvel később élt al-Khwarizmi alkalmazta egyenletek megoldásában: ez a nevezetes *al-muqabla*, ami szerepel híres traktátusa címében is.

Ha a formulára nézünk: ismerték a másodfokú egyenlet gyökképletét erre a speciális esetre???

Természetesen általános képletként NEM, de úgy számoltak, mint mi ma.

A következő feladat teljesen megmutatja eljárásuk erejét.

3. Feladat. *A négyzet hétszereséhez hozzáadtam a terület tizenegyszeresét és ez* $6;15$.

$$11x^2 + 7x = 6;15$$

a megoldandó egyenlet. Most előtt előbb 11-gyel szoroztak, az

$$2,1x^2 + 1,17x = 1,8;45$$

egyenlettel dolgoztak. Ez utóbbi

$$ax^2 + bx = c$$

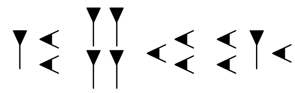
alakban írható, és számolásuk alapján a

$$x = \frac{1}{a}\left(\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right)$$

formulát kapjuk.
Mit állíthatunk ezek alapján?
($\imath$) Már ők is ismerték azt a **gondolatmenetet**, amellyel ma levezetjük a „gyökképletet”.
($\imath\imath$) Általánosítási törekvések, absztrakciók még nyomokban sem találhatók.
($\imath\imath\imath$) Minden esetben konkrét problémákat oldottak meg, és a megoldásokat kizárólag szövegesen írták le.
($\imath\nu$) Csupán „recepteket” adtak konkrét példákkal arra, hogy bizonyos jellegű problémák hogyan kezelhetők.

Mindezt jól példázza azon — korábban már említett — eljárásuk is, amellyel számok, pontosabban pozitív racionális számok) négyzetgyökét határozták meg. Ez is egy Hammurapi uralkodása idején keletkezett agyagtáblán olvasható.
A négyzetgyök kiszámítása.

Tekintsük ismét a korábbi számot.



$$1;24,51,10$$

Ha a 2 négyzetgyökét akarjuk meghatározni akkor egy olyan számok kell keresnünk, amelyiket önmagával megszorozva 2-t kapunk. Az is világos, hogy a keresett szám nagyobb 1-nél, de kisebb 2-nél. Az agyagtábláról tudjuk, hogy lépésenként egymás után olyan számokat számoltak ki, amelyeket önmagukkal szorozva a 2-höz egyre közelebb kerültek. A számolás menete a következő.

1. lépés: Legyen az első közelítés $1;30$ és osszuk el ezzel a 2-t, $1;20$-at kapunk. A $\sqrt{2}$ e két szám közé esik.

2. lépés: Vegyük e két szám összegének felét (számtani közepüket), ami az előbbi kettő között van. Ez

$$0;30(1;30+1;20) = 0;30 \cdot 2;50 = 1;25.$$

Ha ezzel elosztjuk a 2-t, akkor $1;24,42,21$-et kapunk. E két szám is közrefogja a $\sqrt{2}$-t, de már „közelebbről”.

3. lépés: Vegyük e két utóbbi szám számtani közepét:

$$\begin{aligned} 0;30(1;25+1;24,42,21) &= 0;30 \cdot 2;49,42,21 \\ &= 1;24,51,10,30. \end{aligned}$$

Ha elhagyjuk az utolsó 60-ados jegyet, vagy a 21 felét 10-nek vesszük, megkapjuk a tábla értékét.
A $\sqrt{a}$-t kell kiszámítani $a \in \mathbb{Q}^+$-ra.
1. lépés: Legyen a_1, és $b_1 = \frac{a}{a_1}$. $\sqrt{a}$ e két érték között van.
2. lépés: Legyen $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ és $b_2 = \frac{a}{a_2}$. E két szám is közrefogja $\sqrt{a}$-t, és a_2, b_2 az a_1 és a b_1 közé esik.

Az eljárást folytatva olyan

$$a_1, a_2, \dots \qquad b_1, b_2, \dots$$

sorozatokat kapunk, amelyre egyrészt a_i és b_i $(i = 1, 2, \dots)$ közrefogja $\sqrt{a}$-t, másrészt

$$|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2| > \dots$$

Ez azt jelenti, hogy mindkét sorozat egyre jobban megközelíti a keresett értéket, ami e két sorozat közös határértéke (mai terminológiával),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a}.$$

4. Feladat *Két négyzetem területét összeadtam, [az] 25,25. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.*

Világos, hogy ha x, y jelöli a két négyzet oldalát, akkor az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25,25 \\ y &= 0;40x + 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

Kínálkozó ötlet: a második egyenletből y-t az elsőbe helyettesítjük, így az egyhatározatlanos

$$a_1x^2 + a_2x = a_3$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

DE úgy tanultuk,

hogy e módszer — a „behelyettesítés” — bevezetése szintén a Kr.u. VIII. században élt al-Khwarizmi nevéhez fűződik. Ha megvizsgáljuk a megoldás szövegét, akkor nem kétséges, hogy már e korban is ismerniük kellett az al-Khwarizminek tulajdonított eljárást.
Az agyagtáblán ugyanis a következő számolás található:

$$\begin{aligned} 1 + 0;40 \cdot 0;40 &= 1;26,40, \\ 5 \cdot 0;40 &= 3;20, \\ 25,25 - 5 \cdot 5 &= 25,0 \end{aligned}$$

Ez pedig nem más, mint azon egyenlet együtthatói kiszámítása, amit az említett behelyettesítéssel kapunk, azaz

$$x^2 + (0;40x + 5)^2 = 25,25,$$

amit rendezve

$$(1 + 0;40^2)x^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0;40x = 25,25 - 5^2 = 25,0.$$

Ezen egyenlet megoldását az alábbi számolásokkal végezték el:

$$\begin{aligned} 1;26,40 \cdot 25,0 &= 36,6;40, \\ 3;20 \cdot 3;20 &= 11;6,40, \\ 36,6;40 - 11;6,40 &= 36,17;46,40. \end{aligned}$$

Ezután megadták a $36,17;46,40$ négyzetgyökét, ami $46;40$, majd így folytatták.

A gyöknek és annak, amit önmagával szoroztál a különbsége 43; 40. *Ha ezt megszorzod* 1; 26, 40 *reciprokával, megkapod az egyik négyzetet* [*a négyzet oldalát*], *ami* 30. *A másik négyzet* [*oldala*] *pedig* 25.

Ha végignézzük eljárásukat akkor nyilvánvaló, hogy a behelyettesítés után kapott

$$ax^2 + 2bx = c$$

alakú egyenletet előbb a-val megszorozták (ismét egy olyan lépés, aminek első alkalmazását al-Khwarizminek szokás tulajdonítani), majd az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították,

$$(ax + b)^2 = ac + b^2,$$

ezután gyököt vontak, s így kapták az

$$x = \frac{\sqrt{ac + b^2} - b}{a}$$

megoldást. Vegyük észre, hogy ma is ilyen eljárással oldjuk meg a másodfokú egyenleteket.

5. Feladat. *Három négyzetem összege* 23, 20. *Az első és a második négyzet különbsége* 10, *a második és a harmadik négyzet különbsége szintén* 10.

Megoldandó tehát az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 23,20$$
$$x - y = 10$$
$$y - z = 10$$

egyenletrendszer. A táblán található számolásból világos, hogy úgy dolgoztak, mintha előbb a második és a harmadik egyenletből kifejezték volna a z segítségével az x, y -t, majd behelyettesítették az elsőbe. Ezzel z-ben másodfokú egyenlethez jutottak, aminek megoldása már rutin feladat volt.

„Hab a tortán” a következő Kr.e. I. évezredbeli kínai feladat (12. probléma az **Aritmetika művészete kilenc könyvben** c. mű IX. könyvében).

Van egy ajtó, de nem ismerjük sem a magasságát, sem a szélességét. Csak azt tudjuk, hogy a magasság 2 lábbal, a szélesség pedig 4 lábbal rövidebb, mint az ugyancsak ismeretlen hosszúságú bambuszrudunk. Ez azonban ugyanolyan hosszú, mint az ajtó átlója.

E két feladat eredeti megoldási módszere lényegében megegyezik.

Összegzés.
1. Az Óbabiloni Birodalom írnokai minden olyan másodfokú egyenletet meg tudtak oldani, amelyiknek volt pozitív gyöke. (Érdekes, hogy abban az esetben, amikor két pozitív gyök is volt, mindig csak a nagyobbikat adták meg.)
2. Mivel az ilyen jellegű problémáknál negatív számok nem fordulhattak elő (bár néhány gazdasági számításnál találkozhatunk velük, mint hiánnyal), számukra három típusú másodfokú egyenlet létezett, nevezetesen

$$x^2 + px = q$$
$$x^2 = px + q$$
$$x^2 + q = px$$

alakúak. Ha ismét áttekintjük az ismertetett feladatokat, láthatjuk, hogy mindhárom típus előfordult.
Zárásul tekintsünk egy igazi „gyöngyszemet". A szöveges probléma a

$$0;20(x+y) + 0;1(x-y)^2 = 15$$
$$xy = 10,0$$

egyenletrendszerre vezet.

E feladatot tartalmazó, a Yale Egyetem gyűjteményében őrzött agyagtábla csak egy töredék, a feladat megoldása már hiányzik róla. Az előbbiekben ismertetett megoldási technikák közül azonban több is kínálkozik.
1. A második egyenletből kifejezzük az egyik határozatlant, majd behelyettesítjük azt az elsőbe. Ez azonban teljes harmadfokú egyenletre vezet, ami eddigi ismereteink szerint már meghaladja a korabeli ismereteket. Csak speciális alakú, például

$$x^3 = A, \qquad \text{vagy} \quad x^3 + x = B$$

alakú harmdfokú egyenleteket tartalmazó táblák ismeretesek.
A teljes harmadfokú egyenletek bizonyos típusainak megoldására először a közel három évezreddel későbbi iszlám matematikusok adtak meg geometriai módszereket. **E lehetőséget így el kell vetnünk.**

2. Egy másik lehetőség az, hogy a második egyenlet $4 \cdot 0;1$-szeresét hozzáadva az első egyenlethez az

$$0;20(x+y) + 0;1(x+y)^2 = 6,55$$

$(x+y)$-ban másodfokú egyenletet kapjuk, amely már kezelhető lehetne az ismert módszerekkel. Ez az út elképzelhető ugyan, de véleményem szerint kevéssé valószínű.
3. Neugebauer egy ötlete, amely jól illeszkedik gondolkodásmódjukhoz: **vezessünk be két új határozatlant, az eredeti határozatlanok számtani közepére, valamint az attól való eltérésre.** Vegyük észre, hogy a feladatban ismét összeg és különbség szerepel, de az eddigiektől eltérően most mindkettő egyszerre. Ha tehát az

$$x = u + v$$
$$y = u - v$$

helyettesítéseket alkalmazzuk, akkor az

$$0;2u + 0;4v^2 = 15$$
$$u^2 - v^2 = 10,0$$

egyenletrendszert kapjuk, ami már könnyen megoldható, csak a második egyenletből v^2-et az elsőbe kell helyettesítenünk, vagy a második egyenlet $0;4$-szeresét hozzá kell adnunk az elsőhöz.

Megjegyzés. Ez annak ellenére szimpatikus ötlet, hogy más ismert feladatoknál csak egy új határozatlant vezettek be, míg itt egyszerre kettőt kellene.

EGY ÉRDEKES FELADAT
néhány változata

1. RHIND 79. feladat.
Van 7 ház, 49 *macska*, 343 *egér*, 2401 *kalász*, 16807 *búzaszem*. Valószínűleg a következő feladatról van szó:

> *Ha van 7 ház, minden házban 7 macska, minden macska megeszik 7 egeret, minden egér elpusztítana 7 kalászt, és minden kalászban 7 mag van, akkor hány szem gabona menekül meg?*

2. LEONARDO, Liber Abaci XII. fejezete.
7 anyóka mendegél Róma felé, minden anyókával mendegél 7 öszvér, minden öszvéren 7 zsák van, minden zsákban 7 kenyér van, minden kenyér mellett 7 kés van, minden kés 7 tokban van. Mennyi mindezek összege?

3. Középkori orosz kézírat.
Megy 7 anyóka, minden anyókánál 7 bot van, minden boton 7 ágacska, minden ágacskán 7 tarisznya, minden tarisznyában 7 lepény, minden lepényben 7 veréb, minden verébben 7 zúza. Mennyi ez összesen?

4. Ismert angol nonszensz-vers (nursery rhyme).

> *As I was going to St. Ives,*
> *I met a man with seven wives;*
> *Every wife had seven sacks,*
> *Every sack had seven cats,*
> *Every cat had seven kits,*
> *Kits, cats, sacks, and wives,*
> *How many were going to St. Ives?*