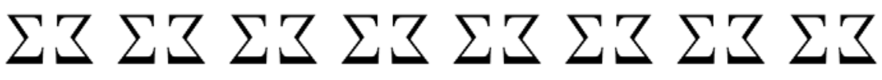
Gévay Gábor

A kaleidoszkóp tanulságai

Végezzük el a következő egyszerű kísérletet: fordítsunk párhuzamosan szembe egymással két tükröt. Alkalmas nézőpontot választva, a tükrök által alkotott tükörképek végtelen sorozatából pillanthatunk meg egy részletet. Ez, ha tetszik, egy *ténylegesen* végtelen rendszerről ad vizuális élményt. A fizikus persze tüstént megjegyzi, hogy a foncsor reflexiós tényezője száz százaléknál mindig kisebb lévén, a fényintenzitás véges számú visszaverődés után nullává válik. A filozófus finom mosollyal boncolgatni kezdi a potenciális és aktuális végtelen *Arisztotelész*ig és *Zénón*ig visszanyúló problematikáját. Sajnos (vagy talán ez épp így van rendjén, hiszen mint *Heisenberg* megjegyezte, „a tudomány emberek műve" — s ez alól a matematika sem kivétel), a matematikusok tábora is megosztott egy ilyen szituáció értékelését illetően. Megadva egyfelől az illő tiszteletet a konstruktivistáknak (akik szintén fenntartással fogadnák a fenti kijelentést), megállapíthatjuk másfelől, hogy a matematikusok jelentős hányadának nem lenne elvi kifogása az ellen, hogy amit itt fizikailag próbáltunk modellezni, az egy végtelen matematikai objektum.

A fizikai tükör képalkotási folyamata egy geometriai (egybevágósági) transzformációt modellez. A két — most már geometriai értelemben vett — tükrözés újabb tükrözések végtelen sorozatát kelti. Elemi geometriai tény, hogy a két generáló tükrözés szorzata párhuzamos eltolást (transzlációt) ad; másrészt, egy transzláció tetszőleges sokszor ismételve újabb transzlációkat eredményez; ezek pedig az eredeti tükrözéspár végtelen sok eltoltját állítják elő mindkét irányban. Fizikai modellünk tehát e végtelen sok tükrözéshez tartozó tükörsíkok rendszerét jeleníti meg (a modellezéshez szükséges idealizációk továbbra is fenntartva).

Keressünk most olyan mintát, amely tükörszimmetrikus mindeme (végtelen sok) tükrözésre nézve. Ehhez elegendő egyetlen motívumot (kezdő alakzatot) felvenni, s hagyni, hogy transzformációink rendszere hasson rá. Leszűkítve a képet két dimenzióra, s alapmotívumként a $\sum$ alakzatot választva, az eredményt az alábbi sorminta mutatja (egy véges részletet kiragadva).



Idézzük most fel *Hermann Weyl* klasszikus definícióját: „Szimmetrikus valami, ha meghatározott műveletnek alávetve változást nem tapasztalunk". Mintánkat a fent említett összes tükrözés és eltolás önmagába transzformálja, azaz invariánsan hagyja; ezek tehát szimmetriaműveletek.

Mi hát az elsődleges? A minta, amelynek felfedezzük a szimmetriáit, vagy a szimmetria, amelyhez egy létrejövő minta igazodik? A kérdés lényeges, fontos, és a lehetséges válaszok nemcsak diszciplínánként lehetnek különbözőek, de egy diszciplínán belül elfoglalt filozófiai alapállástól is függenek. Ennek részletezése itt nem lehet feladatunk; inkább csak néhány utalásra szorítkozunk. Így például, a fizika szimmetriaelveinek kerettörvény jellegével kapcsolatban *Wigner Jenő* megjegyzi: „lelkünk mélyén azt hisszük, hogy az invariancia-törvények, melyek sokkal, sokkal egyszerűbbek, és így talán szebbek is, mint a részletes fizikai egyenletek, tartósabbak is azoknál". *Carl Gustav Jung* a munkásságában alapvető szerepet játszó pszichológiai archetípus fogalom árnyaltabb bemutatása érdekében több helyütt hivatkozott a kristályszimmetriákra. A hasonlat alapjául őnála a kristályok tengelyrendszerének formatív, strukturáló ágensként való felfogása szolgált.

A matematikában legfeljebb történetileg élvez a „minta" a „szimmetriával" szemben prioritást, ám napjainkra e kapcsolat sokrétűvé és szövevényessé vált. A szimmetria matematikai vizsgálatát a *csoport* fogalmának kialakulása tette lehetővé. Két szimmetriaművelet egymás után való elvégzése ismét egy szimmetriaművelet, mint ahogy két szám szorzata ismét szám. A számok szorzásának asszociatív szabálya a szimmetriaműveletek ily módon történő „szorzására" is érvényes. Egy szimmetriaművelet visszafelé történő elvégzése megint csak szimmetriaművelet (az eredetinek inverze); továbbá szimmetriaműveletnek tekintjük azt is, ha nem csinálunk semmit (azonosság, vagy identitás-transzformáció), hiszen ekkor sem tapasztalunk változást (ez a szorzásnál az eggyel való szorzásnak felel meg). A csoport absztrakt definíciója szerint minden olyan halmaz csoport, amelyben bármely két elem szorzata a halmazhoz tartozik, bármely elemnek van egy inverze, létezik egységelem, továbbá a szorzás asszociatív (*Huntington*, 1902). Ez az absztrakt definíció azonban hosszú fejlődési folyamat eredménye, hiszen (permutációkból álló) csoportokkal már *Lagrange* (1736–1813) is foglalkozott. Az absztrakt felfogás kialakulásáig azonban a csoport elsősorban valamilyen matematikai (vagy matematikailag leírható) objektum szimmetriáinak vizsgálatára szolgáló eszköz volt. Sőt, *Hermann Weyl* a tárgyunkat illetően alapműnek számító *Szimmetria* c. könyvében (írásának éve 1951) határozottan kijelenti: „…a modern matematikának ténylegesen vezérelvévé vált: *Ha egy strukturált Σ sokasággal támad dolgod, igyekezz automorfizmus-csoportját meghatározni: a minden strukturális összefüggést megtartó elemtranszformációk csoportját.* Ettől mélyebb betekintést remélhetnek a Σ felépítésébe."

Ez a felfogás már a kezdeteknél látványos áttörést hozott a matematikában. *Évariste Galois* (1811–1832) elmélete választ adott arra a több évszázados kérdésre, hogy mikor oldhatók meg gyökkifejezések segítségével az *n*-edfokú algebrai egyenletek. Így például tudjuk annak „okát" is, hogy az általános ötödfokú (vagy annál magasabb fokú) egyenlethez miért nem létezik legfeljebb a négy alapművelet és gyökvonás segítségével felépített megoldóképlet. A válasz az egyenlethez meghatározott módon hozzárendelt (a gyökök bizonyos permutációiból álló) csoport szerkezetében rejlik.

Galois munkáját elérte az igazán úttörő tudományos eredmények nemegyszer tapasztalt végzete: a kortársak alig vettek tudomást róla, és az elméletet a maga teljességében csak a század vége felé sikerült megérteni. A csoportfogalom azonban lassanként kezdett behatolni a matematika egyéb területeire is.

Ebben kívülről jövő hatások is szerepet játszottak. Az egyik ilyen ösztönzést például a természet nyújtotta megkapó anyagi alakzatok, a kristályok szimmetriáinak vizsgálata jelentette. *J. F. C. Hessel* 1830-ban megtalálta a kristályok morfológiai leírásának alapjául szolgáló 32 kristályosztályt (ez a háromdimenziós euklideszi tér azon véges egybevágóság-csoportjainak felelnek meg, melyek „krisztallográfiailag megengedett" szimmetria-transzformációkból állnak). Ezeket a kategóriákat ő azonban még nem csoportként kezelte. Ugyanezekhez az osztályokhoz eljutott a francia fizikus, *August Bravais* (1849) és a finn kémikus, *Axel Gadolin* (1867) is, lényegében szintén a csoportfogalom használata nélkül. (Megjegyezzük, hogy

Hessel munkája csak könyvének egy a halála után 25 évvel megjelenő kiadása — 1897 — alapján vált ismertté.) *Arthur Schönflies* német matematikus 1891-ben kiadott könyvében a kristályszimmetriák matematikai leírásának eszközeként viszont már megjelennek a csoportok.

Az első összefoglaló munka, amelyben a tér mozgáscsoportjainak fogalma már kidolgozott formában és a rendszerezés igényével jelenik meg, *Camille Jordan* francia matematikus *Mémoire sur les groupes des mouvements* című dolgozata (1869). Ebben mind a kristálytanban előforduló diszkrét, mind a kinematikából származó folytonos mozgáscsoportok szerephez jutnak, így hát természetes, hogy befolyással volt *Felix Klein*re és *Sophus Lie*-re, akik a csoportelmélet diszkrét, illetve folytonos „ágának" olyan jelentős fejlesztői lettek, hogy hatásuk napjainkig érezhető.

E történeti megjegyzések sorát most kénytelenek vagyunk megszakítani; hadd említsünk még meg azonban egy igen jelentős fejleményt. Ez pedig Klein 1872-es professzori székfoglalójában megfogalmazott elképzelése (a nevezetes „erlangeni program"), mely szerint egy-egy geometriához (euklideszi geometria, projektív geometria, stb.) egy-egy jellemző csoportot lehet rendelni, s az illető geometria voltaképpen nem más, mint e csoport invariánsainak elmélete. Kissé leegyszerűsítve, úgy is fogalmazhatnánk, hogy a különböző terek, illetve az őket leíró geometriai elméletek között e terek „szimmetriái" alapján tudunk különbséget tenni — másrészt, különböző köntösben megjelenő, de lényegében azonos geometriák egyezése kimutatható a csoportjuk összehasonlítása révén.

Térjünk azonban most vissza tükörrendszerünkhöz. Kis módosítással végtelen csoportunkat véges csoporttá tudjuk alakítani. Ha a két tükör síkja nem párhuzamos, hanem például 60 fokos szöget zár be, egyetlen újabb — virtuális — tükörsík jelenik meg, az egyiknek a másikra vonatkozó tükörképe. A három sík egy közös egyenesben metsződik, amely két ilyen tükrözés szorzataként előálló 120 fokos forgatás tengelye; a forgatás történhet pozitív vagy negatív irányban. Van végül identitás-transzformáció is (mint például az említett két forgatás szorzata). 3 tükrözés, 2 forgatás és 1 identitás — e hatelemű csoport az ún. diéder-csoportok egyike, jele D_3. (Ezt igen könnyű síkban szemléltetni: leszűkítve e csoport hatását a tükrökre merőleges síkra, tengelyes tükrözéseket és pont körüli forgatásokat kapunk, amelyek éppen a szabályos háromszög szimmetriacsoportját alkotják.)

A címben ígért játékszertől most már csak egyetlen lépés választ el minket. Ehhez egy újabb generátorelemet kell a rendszerbe iktatni: egy újabb tükrözést, amelynek síkja szintén 60 fokos szögben hajlik az első kettőhöz, de nem megy át azok közös egyenesén. Nos, a kaleidoszkópban elhelyezett három tükör (a totálreflexió feltételének teljesülése miatt általában csupán foncsor nélküli üveglap) szabályos háromoldalú hasábot képez. A képmező így egy egyenlő oldalú háromszög, amelyet a határoló tükrök egy-egy szomszédos háromszögbe transzformálnak. Ezeket a saját — virtuális — határoló tükrei további szomszédos háromszögekbe transzformálják, és így tovább, *ad infinitum*. Egy sík egyenlő oldalú háromszögekkel kiparkettázható, azaz hézagmentesen és átfedések nélkül lefedhető — az alapháromszög összes lehetséges transzformáltjai éppen egy ilyen parkettázást szolgáltatnak. Készen áll a szimmetria „állványzata" — a tükrök és forgástengelyek végtelen rendszere —, ehhez már csak a színes üvegdarabkák kellenek, melyeknek az alapháromszögben kialakuló, mindig változó véletlenszerű elrendeződése szigorú rend szerint végtelenül ismétlődve létrehozza a jól ismert látványt.

Véletlenszerűség és szigorú rend. Talán épp a kettő szimultán jelenléte az, amely gyönyörködtetővé teszi a képet. A rendetlenség, a kaotikus összevisszaság önmagában zavaró, nyugtalanító. Az önmagában egyhangúan ismétlődő szigorú rend puszta vizuális élmény formájában unalmas, véglegességet, befejezettséget sugall. Sőt, Hermann Weyl nevezetes könyvében e felfogásnak egy végletes változatára is utal, *Thomas Mann Varázshegy*éből[1] idézve: „…az élet irtózott a tökéletes pontosságtól, halált sejtett benne, a halál titkát — és Hans Castorp érteni vélte, hogy régi korok pogány templomépítői miért építették oszloprendjeiket titkon és szánt szándékkal úgy, hogy kissé eltérjenek a teljes szimmetriától". Ehhez a gondolathoz szorosan kötődik *Ny. B. Belov* orosz krisztallográfus egy érdekes felvetése. Összevetve az ötszögszimmetria viszonylag gyakori megjelenését az élővilágban azzal, hogy e szimmetriatípus (egyszerű matematikai okoknál fogva) tiltott a kristályok világában, arra a megállapításra jut, hogy „…az ötfogású szimmetriatengely a parányi élőlények sajátos védekezési eszköze a létért folyó küzdelemben, biztosíték a megkövesedés, a kikristályosodás ellen, melynek első lépése az lenne, hogy a kristályrács »megfogná« őket"[2]. A pusztulás, az életidegenség asszociációjával kapcsolatban ide kívánkozik még egy megjegyzés: a militáris parádék mélységesen ostoba alakzatai a szemlélő pszichéjének primitív mélyrétegeiben rezonanciát keltve talán ennek köszönhetően (is) képesek a fenyegetettség érzetét felidézni… A kontraszt kedvéért azonban hadd utaljunk egy az előzővel szöges ellentétben álló — és talán elterjedtebb — felfogásra: arra, amely az isteni tökéletességgel társítja a szimmetria fogalmát. Bizonyos korokban és kultúrkörökben ez a felfogás is korlátozásokat rótt a művészekre: alkotásaikba itt azért illett rejtett aszimmetriákat beépíteni, nehogy a túlzott tökéletességgel fejükre vonják a féltékeny istenek haragját.

Mindenesetre, a kaleidoszkóp a maga egyszerűségében azt is modellezi, hogy a rend és rendezetlenség között ívelő feszültség hogyan lehet az esztétikum forrása. A látott kép kétségtelenül szép — természetes volt tehát a skót fizikus, *Sir David Brewster* (1781–1868) névadása (*kalosz* / e*idosz* / *szkopein*: szép / alak / látni). (Brewster — 1816 körül vizsgált — kaleidoszkópja éppen a korábban említett, két egymáshoz 60 fokos szögben hajló tükörből állt; megjegyezzük, hogy az ilyen eszközök már jóval korábban is ismeretesek voltak - az első ismert ilyen témájú könyv, *Athanasius Kircher* műve, 1696-ban jelent meg.)

A kaleidoszkóp-fogalom matematikai általánosításának irányába a kezdő lépést az az észrevétel jelentette, hogy tükörrendszerünk „térbelivé" tehető a következő értelemben. Az első két tükörhöz úgy csatlakoztatunk — alkalmas szögben — egy harmadikat, hogy a három tükörnek csak egyetlen közös pontja legyen (egy testszögletet, illetve „triédert" képeznek). A három generátor által létrehozott teljes tükörrendszerben a tükrök ekkor már nem mind egyetlen közös tengelyre illeszkednek, hanem a tér több különböző irányába mutató tengelyekből álló rendszer keletkezik (minden egyes tengely körül egy a Brewster-féle kaleidoszkópra emlékeztető tükör-alrendszerrel). A triéder-kaleidoszkóp gondolata már 1852-ben felmerül *Ferdinand Möbius* egy (kristály-szimmetriákról írott) dolgozatában. 1918-ban *W. A. Wythoff* holland matematikus négydimenziós szabályos alakzatok előállítására használja a megfelelően továbbfejlesztett — immáron kizárólag absztrakt értelemben létező — kaleidoszkópot (ehhez 4 generátor szükséges).

Az ilyen tükörrendszerek legszabályosabb típusai a platóni testek, azaz szabályos poliéderek szimmetriáját jellemzik. Ugyanez igaz a platóni testek tetszőleges dimenziójú megfelelőinél, a szabályos n-politópok esetében (n dimenzióban ezek szimmetriacsoportja n tükrözéssel generálható). Másrészt, mindezek az alakzatok meg is kaphatók Wythoff konstrukciójával: vegyünk egy alkalmas helyzetű pontot a kaleidoszkópunkban (színes üvegdarabka helyett), s hagyjuk, hogy a tükrök az összes lehetséges módon előállítsák a transzformáltjait; a generátorok és a kezdőpont megfelelő választásával az így előálló pontrendszer egy-egy szabályos „test" (politóp) csúcspontjainak összességét adja.

Íme, a Wythoff-konstrukció megjelenése már a fordulópontot jelzi a „szimmetria" és „minta" viszonyában. Az előre kirótt szimmetria (a kaleidoszkóp, illetve a csoport lerögzítésével) a kívánt mintát generálja — természetesen egy alapmotívum lerögzítése is szükséges, úgy ahogyan azt fentebb a sormintánkkal kapcsolatban bemutattuk. A szimmetria — ez esetben a „kaleidoszkóp-csoportként" való matematikai megtestesülése révén — a lehetséges mintáktól függetlenül önálló életre kelt.

A tükrözésgenerált csoportoknak avagy tükrözéscsoportoknak ez az önálló élete egy kiterjedt elmélet keretében teljesedett ki, amelynek alapjait *H. S. M. Coxeter* (mára a geometria egyik „nagy öregje”) rakta le. A *Bourbaki* nyomán ma Coxeter-csoportoknak is nevezett csoportok segítségével maga Coxeter például részletesen meg tudta vizsgálni a szabályos és félig szabályos testek és végtelen térkitöltések tetszőleges dimenzójú megfelelőit; másfelől, kiderült az is, hogy (a hat-, hét- és nyolcdimenziós euklideszi terekben) olyan kaleidoszkópok is vannak, amelyek nem köthetők a platóni testek, illetve szabályos végtelen térkitöltések semmiféle közvetlen analogonjához. Az ilyen különleges csoportok éppen a Coxeter-csoportoknak egy másik „természetes lelőhelyére” utalnak — ez pedig a Lie-csoportok és Lie-algebrák elmélete. A Lie-algebrák (és -csoportok) szerkezetének vizsgálatában fontos szerepet játszó ún. Weyl-csoportokról kiderült, hogy lényegében Coxeter-csoportok speciális esetei.

A kutatásokat elég természetes volt kiterjeszteni a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriában előforduló „hiperbolikus kaleidoszkópokra” is. Az első lépéseket itt is Coxeter tette meg, később svéd, illetve szovjet matematikusok csatlakoztak ehhez az ághoz. Az elmélet egyik korai eredménye azzal kapcsolatos, hogy bizonyos, még a múlt század második felében felfedezett csoportokról nehéz volt eldönteni, hogy végesek vagy végtelenek. Miután ezeket összefüggésbe lehetett hozni már jól ismert kaleidoszkópokkal, és meg lehetett mutatni, hogy az ilyen csoportok mely esetekben hoznak létre olyan mintákat, amelyek kiterjednek az *egész* (akár euklideszi, akár hiperbolikus) síkra, meg lehetett adni egy egyszerű kritériumot, melynek alapján a kérdés eldönthető minden egyes ilyen csoport esetében.

Ennél a pontnál érdemes kissé megállnunk, hiszen ismét útjelzőhöz érkeztünk. Amellett, hogy megint felvetődött (ha mégoly érintőlegesen is) a véges és végtelen kérdése, érdemes megfigyelni, hogy itt már felcserélődtek a szerepek. Ezúttal a csoportról, ha tetszik, magáról a „szimmetriáról” szeretnénk megtudni egy fontos információt. Ennek érdekében egy „mintát” hozunk létre, majd annak vizsgálata alapján hozzájutunk a kívánt adathoz (vessük ezt össze a tanulmány elején Weyl megfogalmazásában idézett elvvel!).

Ez a módszertani irányváltás persze azzal is összefüggésben van, hogy időközben maguk a csoportok (nemcsak a kaleidoszkóp-csoportok és nemcsak általában a transzformáció-csoportok) nagyon is beható kutatások tárgyává váltak. A matematikában a kutatás tárgya és a kutatás eszköze sok más tudományszaktól eltérően sokkal kevésbé különül el, lévén mindegyik: fogalmi természetű. A csoportnak nevezett matematikai struktúrákat más matematikai struktúrákkal kapcsolatba hozva, a konkrét probléma jellegétől függ, hogy melyikük játssza a főszerepet — amennyiben egyáltalán ilyenről szó lehet, s éppen nem mellérendelő viszonnyal van dolgunk. Ám bármennyire is terjedelmes és sokágú fejezetévé vált a csoportelmélet a matematikának, a gyökereitől sohasem szakadt el. Ezt az is mutatja, hogy valamely csoport szerkezetének vizsgálatakor igen gyakran követett módszer, hogy — a fordított szereposztásnak megfelelően — egy „strukturált Σ sokaságot” hoznak létre, s ez lesz az a minta, amelynek az illető csoport (valamely absztrakt vagy kevésbé absztrakt értelemben) a transzformáció-csoportja. Sőt, a csoportelmélet egyik ága — a csoport-reprezentációk elmélete — éppen erre a fordított módszertani elvre épül.

Egy idevágó látványos példa a közelmúltból: 1982-ben *Robert Griess* amerikai matematikus a Szörny néven ismert csoportot meg tudta adni a 196883 dimenziós térben értelmezett szimmetriacsoportként (ekkora a legkisebb tér, amelyben ez megtehető). Ez a — Barátságos Óriásnak is nevezett — csoport a legnagyobb létező sporadikus véges egyszerű csoport (egyszerű csoportnak lenni olyasmit jelent a csoportok körében, mint prímszámnak lenni a számok körében; a „sporadikus” jelző pedig az egyediségre utal, arra, hogy nem sorolható be más egyszerű csoportoknak egymással szoros rokonságban levő valamely családjába). Tárgyunk szempontjából is említésre méltó körülmény továbbá, hogy az ugyancsak amerikai *J. H. C. Conway*-nek sikerült e csoportnak bizonyos tükrözéscsoportokkal való szoros kapcsolatát kimutatni.

Visszatérve a kaleidoszkópokhoz, az alkalmazások egy példájaként még hadd említsük meg a gömbök Newton-számának problémáját. 1694-ben Newton vitába keveredett a kortárs skót matematikussal, *James Gregory*val. A (csillagászati ihletésű) disputa arról folyt, hogy egymásba nem nyúló azonos méretű merev gömbökből maximálisan hányat lehet elhelyezni egy ugyanilyen gömb körül úgy, hogy mindegyik érintse a középsőt. Newton e szám értékét 12-nek vélte, míg Gregory 13-nak. Newtonnak volt igaza, ám erre matematikai bizonyítás 1874-ig nem volt ismeretes. A kérdés tetszőleges dimenziószám esetén is feltehető, így például már rögtön 4 dimenzióban mind a mai napig nem tudjuk, hogy a két lehetséges érték, 24 és 25 közül melyik a helyes. Magasabb dimenziók felé haladva, a bizonyított alsó és felső korlátok közötti intervallum egyre jobban szétnyílik. (A meghökkentő kivételt a 8-, illetve 24-dimenziós gömbök jelentik, melyek Newton-számát ismerjük: 240, illetve 196560). Mármost figyelemre méltó tény, hogy egészen 8 dimenzióig az alsó korlátokat (illetve a pontos értéket) gömbök olyan ismert elrendeződései szolgáltatják, amelyek egy-egy alkalmas kaleidoszkóp segítségével állíthatók elő, a korábban már vázolt módon. (Két dimenzióban: letéve az asztalra egy tízforintost, hat másik tízforintost tudunk körülötte így elhelyezni és többet nem — a hat tükörtengely is könnyen megtalálható.) Az erőfeszítések, hogy ezektől eltérő, a térkihasználás szempontjából gazdaságosabb elrendeződéseket találjunk, sorra zátonyra futnak. Lehetséges, hogy (4–7 dimenzióban) a gömböknek éppen ilyen „kaleidoszkopikus” mintái jelentik a végső választ a problémára?

Szimmetriáról szólva, annak legegyszerűbb, leghétköznapibb változata, a tükörszimmetria szokott legelőször eszünkbe ötleni. Ki hinné mindaddig, míg közelebbről nem találkozik vele, hogy néhány tükör alkalmas egymás felé fordításával a szimmetria — szó szerint — végtelen lehetőségei tárulnak fel? A tükrök természetét megváltoztatva, vajon más területeken is így van ez ? Egy lehetséges válaszért forduljunk Goethéhez[3]: „Ha meggondoljuk, hogy a többszörös erkölcsi visszatükröződések a múltat nemcsak életben tartják, hanem magasabb rendű életre emelik, emlékezni fogunk arra az entoptikai jelenségre, amelynek során a képmás tükörről tükörre haladva nemhogy halványulna, hanem épp ezúton lobban igazán fényre. E jelenség szimbólumául szolgálhat annak a számtalan ismétlődésnek, amely a művészetek, a tudomány, az egyház, sőt alighanem még a politikai élet történetében is előadódott, és nap mint nap előadódik”.

JEGYZETEK:

1 *Szőllősy Klára* fordításában. Európa Könyvkiadó, Budapest, 1969.

2 Idézi: *A. Sz. Szonyin*: Beszélgetések a kristályfizikáról c. könyvében. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.

3 In: *Richard Friedenthal*: Goethe élete és kora. Fordította *Györffy Miklós*. Európa Könyvkiadó, Budapest, 1978.

Kiegészítés

A fenti dolgozat 1999-ben jelent meg a *Magyar Tudomány* c. folyóiratban. Bizonyos, a matematikában azóta beállt változások miatt — legalább — két ponton frissítésre szorul.

(1) *H. S. M. Coxeter*, aki a 20. század egyik vezető matematikusa volt, 2003-ban elhunyt (sz. 1907). Hosszú életének egészen a végéig aktívan folytatta tudományos tevékenységét. 2002-ben a Bolyai János születésének kétszázadik évfordulója alkalmából Budapesten rendezett nemzetközi konferencián még részt vett meghívott előadóként.

(2) A 4-dimenziós gömbök Newton-számának problémáját *Oleg R. Musin* orosz matematikus 2003-ban megoldotta. Bebizonyította, hogy ez a szám nem nagyobb 24-nél (az, hogy legalább 24, már régóta ismeretes volt).

Gévay Gábor, 2005. december