Hogyan óvjuk meg értékes festményeinket?

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, SZTE, Szeged

2013. április

Bevezető példa I.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Bevezető példa I.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választható ki három.

Bevezető példa I.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választható ki három.
Mindegyik kiválasztás egy-egy háromszöghöz vezet.

Bevezető példa I.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választható ki három. Mindegyik kiválasztás egy-egy háromszöghöz vezet.

Helyezzünk el pontokat a síkon úgy, hogy mind a 56 fenti háromszög belsejébe essen kiválasztott pont.

Bevezető példa I.

Feladat

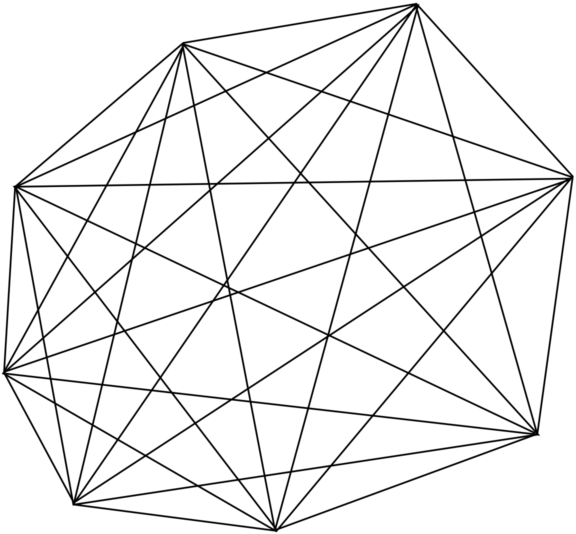
Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választható ki három. Mindegyik kiválasztás egy-egy háromszöghöz vezet.

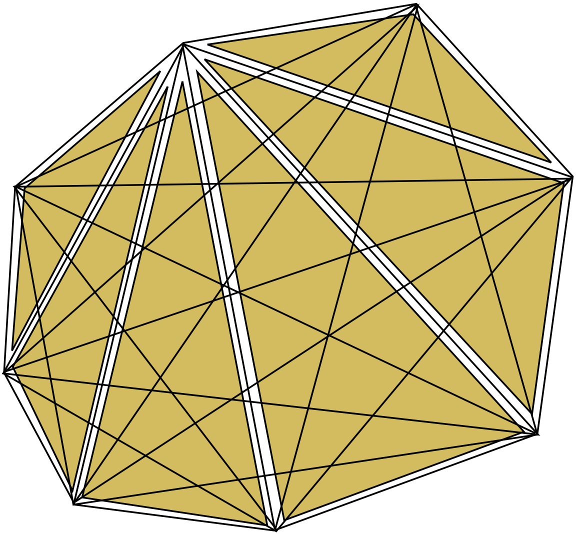
Helyezzünk el pontokat a síkon úgy, hogy mind a 56 fenti háromszög belsejébe essen kiválasztott pont.

Legalább hány pontra van szükségünk?

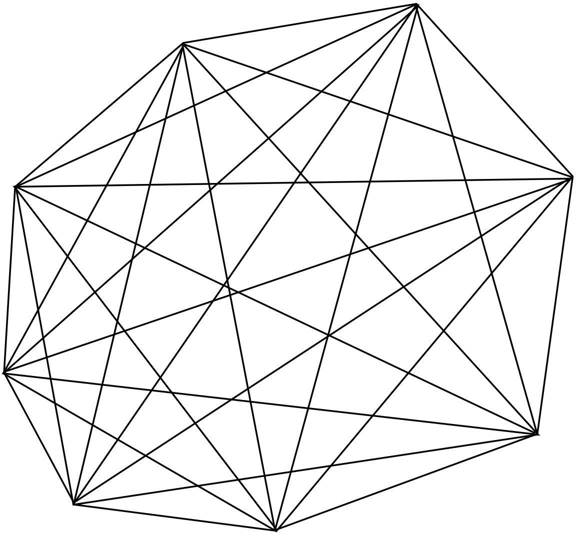
A megoldás: alsó becslés



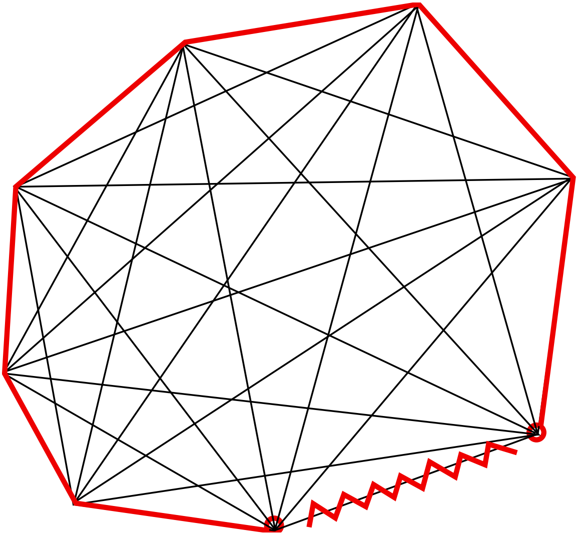
A megoldás: alsó becslés



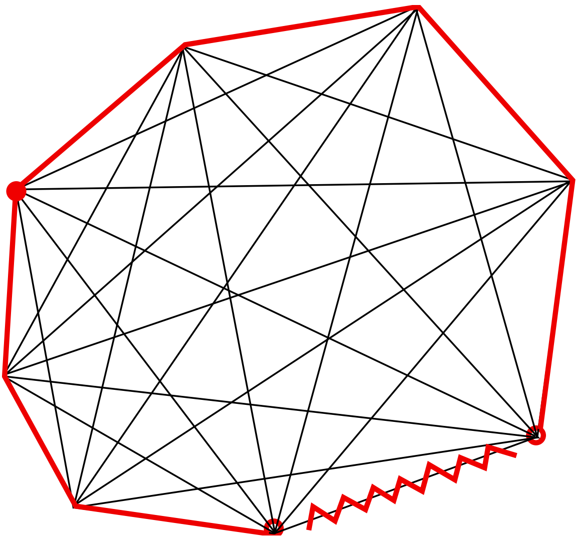
A megoldás: felső becslés



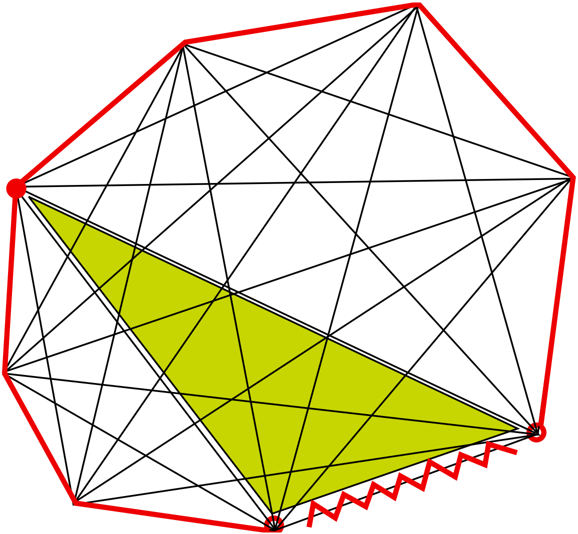
A megoldás: felső becslés



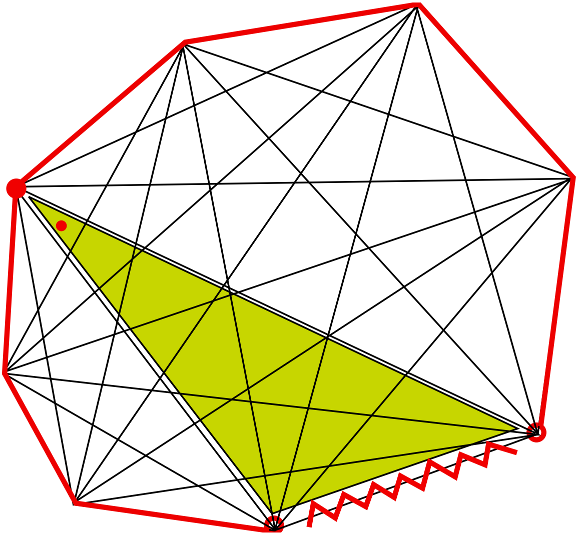
A megoldás: felső becslés



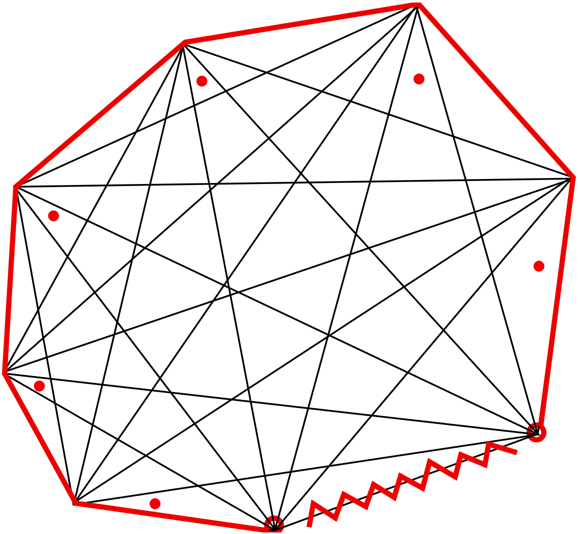
A megoldás: felső becslés



A megoldás: felső becslés



A megoldás: felső becslés



FONTOS ötlet

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

FONTOS ötlet

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

BELSEJEIK PÁRONKÉNT DISZJUNKTAK

akkor

FONTOS ötlet

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

BELSEJEIK PÁRONKÉNT DISZJUNKTAK

akkor

KÜLÖNBÖZŐ PONTOKAT IGÉNYELNEK.

FONTOS ötlet

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

BELSEJEIK PÁRONKÉNT DISZJUNKTAK

akkor

KÜLÖNBÖZŐ PONTOKAT IGÉNYELNEK.

Észrevétel

Ha találunk legalább k páronként diszjunkt háromszöget, akkor legalább k pont kell a megoldáshoz.

Kérdések

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n-szöggel dolgozunk?

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n-szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

Kérdések

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n-szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

2. kérdés

Mi van ha n általános helyzetű ponttal dolgozunk?

Kérdések

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n-szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

2. kérdés

Mi van ha n általános helyzetű ponttal dolgozunk?

Nehezebb a kérdés. De OKOS diákjaink még mindig megoldják.

Kérdések

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n-szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

2. kérdés

Mi van ha n általános helyzetű ponttal dolgozunk?

Nehezebb a kérdés. De OKOS diákjaink még mindig megoldják. 1991. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny egyik (legnehezebb) feladata.

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói.

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

n fáklya elég.

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

n fáklya elég.

Második ötlet:

Bevezető példa II.

Feladat

Egy pincében egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n-szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

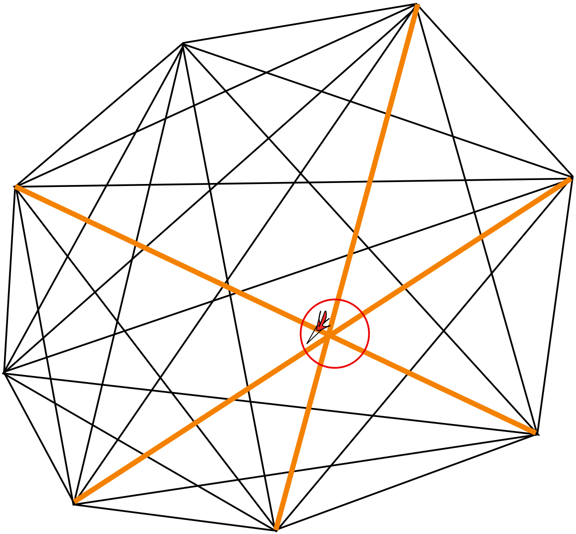
$$n \text{ fáklya elég.}$$

Második ötlet:

$$n-1 \text{ fáklya elég.}$$

A feladat ábrán

A feladat ábrán



A korábbi ötlet nem működik

Közös pont nélküli két folyosó $\equiv$ Külön fáklyát igénylő két folyosó.

A korábbi ötlet nem működik

Közös pont nélküli két folyosó $\equiv$ Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Kérdés

Hány páronként közös pont nélküli folyosót tudok kijelölni?

A korábbi ötlet nem működik

Közös pont nélküli két folyosó $\equiv$ Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Kérdés

Hány páronként közös pont nélküli folyosót tudok kijelölni?

A válasz:

A korábbi ötlet nem működik

Közös pont nélküli két folyosó $\equiv$ Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Kérdés

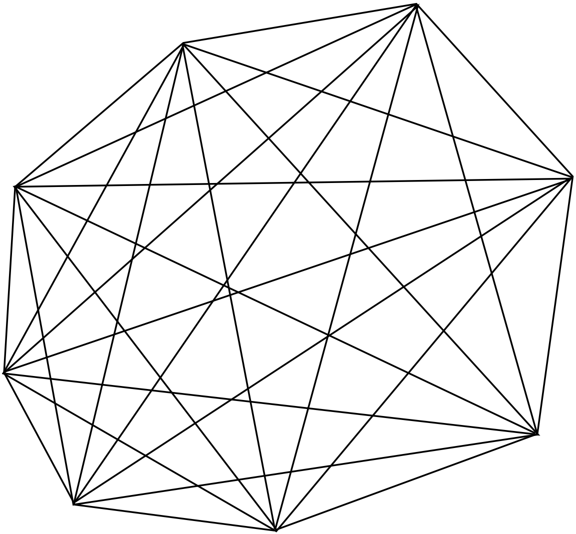
Hány páronként közös pont nélküli folyosót tudok kijelölni?

A válasz:

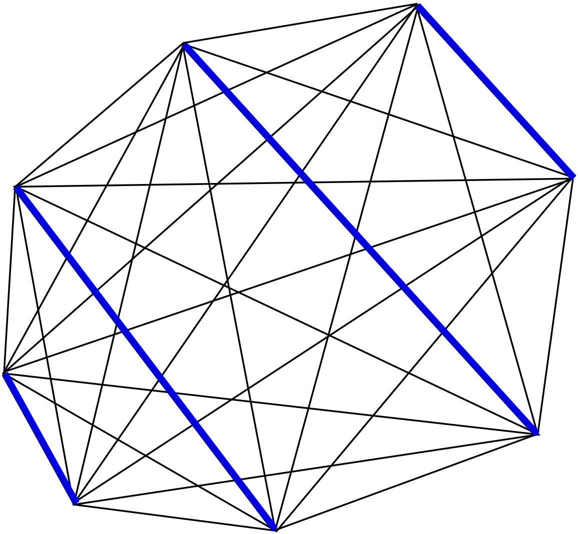
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Az ötlet ábrán

Az ötlet ábrán



Az ötlet ábrán



A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A-ban összefutó folyosókat. ($n-1$ darab.)

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A-ban összefutó folyosókat. ($n-1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A.

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A-ban összefutó folyosókat. ($n-1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A.

Ha A-ban nincs fáklya, akkor

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A-ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A.

Ha A-ban nincs fáklya, akkor EZ AZ $n - 1$ FOLYOSÓ MINDEGYIKE KÜLÖN FÁKLYÁT IGÉNYEL.

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

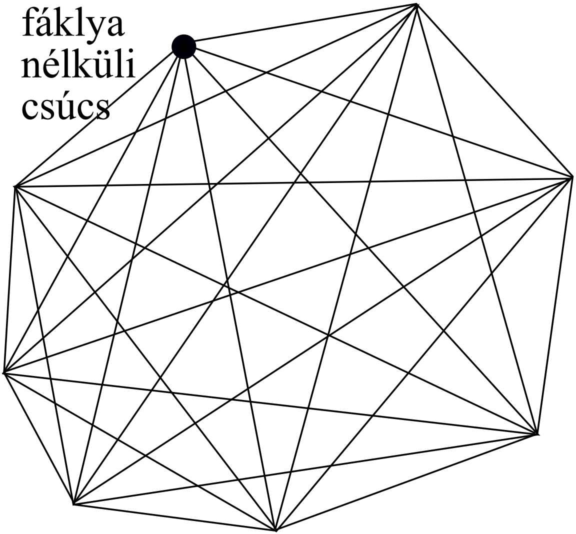
Vegyük az A-ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A.

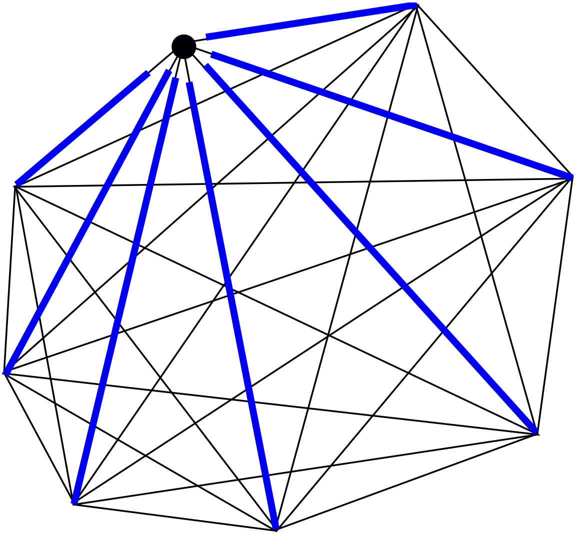
Ha A-ban nincs fáklya, akkor EZ AZ $n - 1$ FOLYOSÓ MINDEGYIKE KÜLÖN FÁKLYÁT IGÉNYEL.

A feladat megoldása: $n - 1$ fáklya kell, de elég is.

A megoldás ábrán



A megoldás ábrán



Lássuk a festményeket!

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű:

Egyszerű: Fogadjuk fel őröket. Helyezzük el őket sűrűen.

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű: Fogadjuk fel őröket. Helyezzük el őket sűrűen.

Mégsem olyan egyszerű.

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű: Fogadjuk fel őröket. Helyezzük el őket sűrűen.

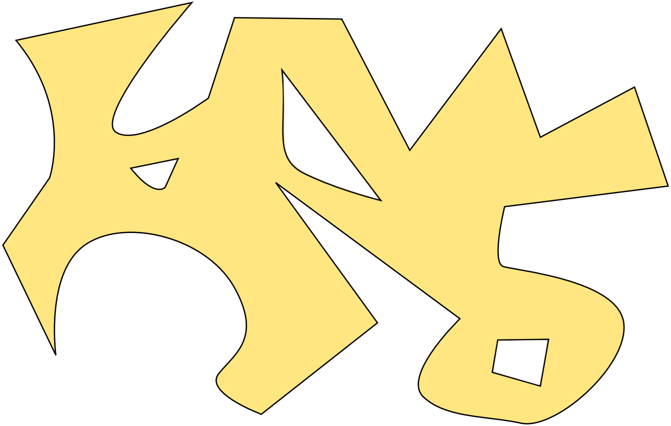
Mégsem olyan egyszerű. Tudja valaki mennyibe kerül egy megbízható őr?

Mi az hogy sűrűen?

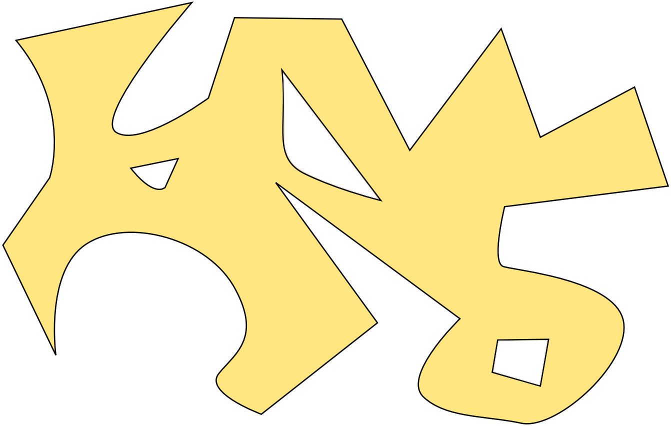
Legyen G egy képtár:

Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: tartomány

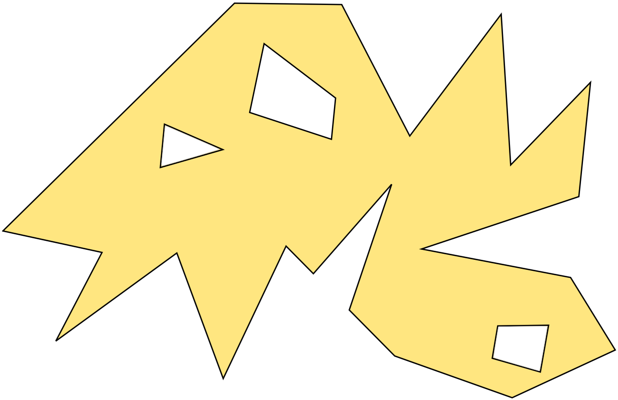


Legyen G egy képtár: síkbeli tartomány



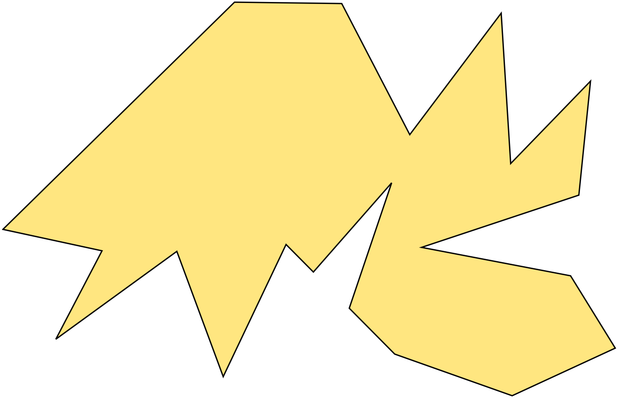
Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: sokszög



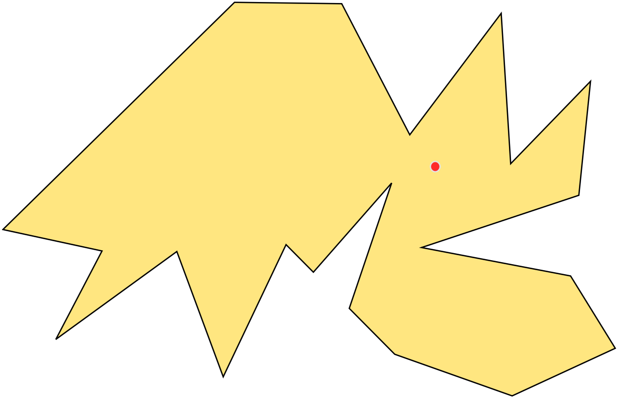
Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.

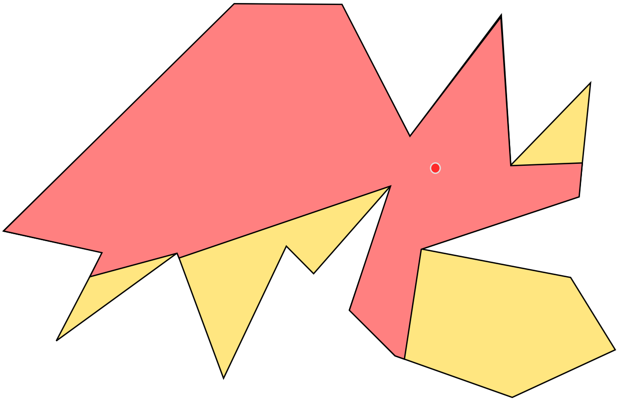


Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.
Legyen O egy pontja (az őr).

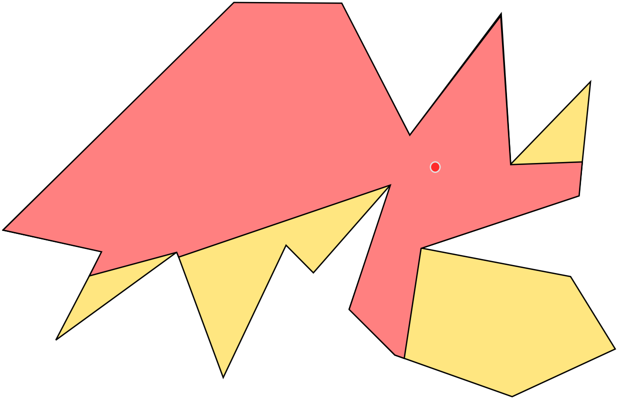


Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.
Legyen O egy pontja (az őr).
Amit LÁT O, azt őrzi.



Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.
Legyen O egy pontja (az őr).
Amit LÁT O, azt őrzi.



Sűrű = Az őrök által látott területek fedjék le a képtárat.

A kérdés

Minimum hány őr kell egy képtár őrzésére?

A kérdés

Minimum hány őr kell egy képtár őrzésére?

Természetes érzés: Bonyolultabb, nagyobb képtár, több őr.

A kérdés

Minimum hány őr kell egy képtár őrzésére?

Természetes érzés: Bonyolultabb, nagyobb képtár, több őr.

Minimum hány őr kell egy N oldalú képtár őrzésére?

Definíció

Definíció

Legyen E egy egyszerű sokszög.

Definíció

Legyen E egy egyszerű sokszög.

$$\mathrm{guard}(E) = \min\{k : \ k \text{ őrrel őrizhetjük } E\text{-t}\}$$

Definíció

Definíció

Legyen E egy egyszerű sokszög.

$$\text{guard}(E) = \min\{k : \ k \text{ őrrel őrizhetjük } E\text{-t}\}$$

Definíció

$$guard(N) = \min\{\text{guard}(E) : \ E \text{ egy egyszerű } N\text{-szög}\}.$$

Alsó becslés

Alsó becslés

Mi az, hogy alsó becslés?

Alsó becslés

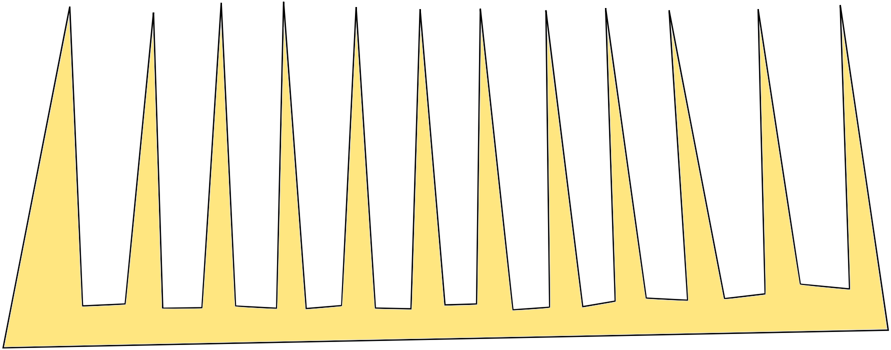
Mi az, hogy alsó becslés?

Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.

Alsó becslés

Mi az, hogy alsó becslés?

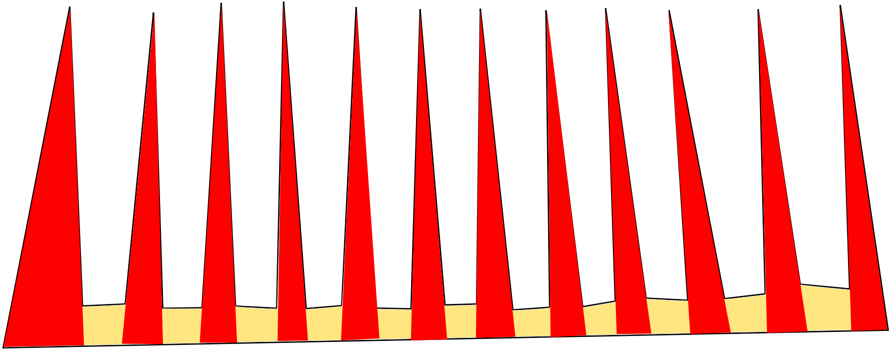
Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.



Alsó becslés

Mi az, hogy alsó becslés?

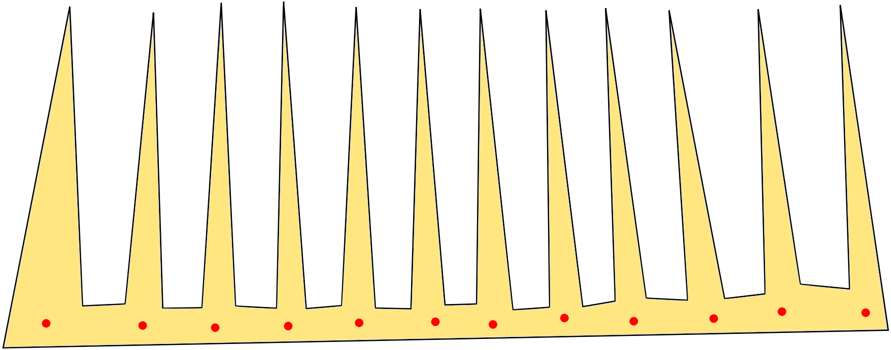
Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.



Alsó becslés

Mi az, hogy alsó becslés?

Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.



Az alsó becslés

Az alsó becslés

Alsó becslés

$$guard(N) \geq \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor .$$

Felső becslés

Felső becslés

Minden N oldalú sokszöghöz megfelelő számú őrt kell biztosítanunk.

Felső becslés

Minden N oldalú sokszöghöz megfelelő számú őrt kell biztosítanunk.

Észrevétel

Ha minden csúcsba őrt rakunk, akkor rendben vagyunk.

Felső becslés

Minden N oldalú sokszöghöz megfelelő számú őrt kell biztosítanunk.

Észrevétel

Ha minden csúcsba őrt rakunk, akkor rendben vagyunk.

Felső becslés

$$\mathrm{guard}(N) \leq N.$$

Háromszögelések

Tétel

Minden egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.

Tétel

Minden egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.

Tétel$^+$

Egy N oldalú egyszerű sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk.

Tétel

Minden egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.

Tétel^{+}

Egy N oldalú egyszerű sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk.

Minden esetben ugyanannyi háromszögünk lesz, $N-2$.

Az alaptétel mozgatórugója

FŐLEMMA

Egy egyszerű sokszögben mindig találhatunk olyan átlót, amely teljesen a sokszög belsejében halad.

A FŐLEMMA bizonyítása

Vegyünk egy C csúcsot, amelyben konvex szög van!

A FŐLEMMA bizonyítása

Vegyünk egy C csúcsot, amelyben konvex szög van!
Legyen a két szomszédos csúcs C^- és C^+.

A FŐLEMMA bizonyítása

Vegyünk egy C csúcsot, amelyben konvex szög van!
Legyen a két szomszédos csúcs C^- és C^+.
Ha a C^-C^+ átló nem jó, akkor vegyük a $CC^-C^+\triangle$-ben lévő, C-től különböző, C^-C^+-tól legtávolabbi D csúcsot.

A FŐLEMMA bizonyítása

Vegyünk egy C csúcsot, amelyben konvex szög van!
Legyen a két szomszédos csúcs C^- és C^+.
Ha a C^-C^+ átló nem jó, akkor vegyük a $CC^-C^+\triangle$-ben lévő, C-től különböző, C^-C^+-tól legtávolabbi D csúcsot.
CD áltó bizonyítja a FŐLEMMÁt.

Észrevétel

Észrevétel

Sokszögünket háromszögeljük. Ha úgy rakunk le őröket a csúcsokba, hogy minden háromszög esetén valamelyik csúcsába kerüljön őr, akkor védjük a sokszöget/képtárat.

Fisk tétele

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög.

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög. Ekkor csúcsai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög. Ekkor csúcsai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy a háromszögelés minden háromszögében három különböző színű csúcs legyen.

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög. Ekkor csúcsai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy a háromszögelés minden háromszögében három különböző színű csúcs legyen.

Bizonyítás

Indukció és FŐLEMMA.

A FŐTÉTEL

A FŐTÉTEL

FŐTÉTEL

$$\mathrm{guard}(N) = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor .$$

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

1. KÉRDÉS: Hogyan mérjük egy poliéder bonyolultságát?

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

1. KÉRDÉS: Hogyan mérjük egy poliéder bonyolultságát?

2. KÉRDÉS: Mi az "egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontás" térbeli megfelelője?

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

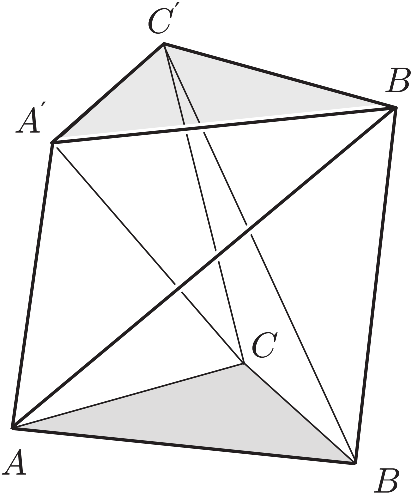
1. KÉRDÉS: Hogyan mérjük egy poliéder bonyolultságát?

2. KÉRDÉS: Mi az “egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontás” térbeli megfelelője?

3. KÉRDÉS: Minden csúcsba rajunk őrt. Őrzik a képtárat?

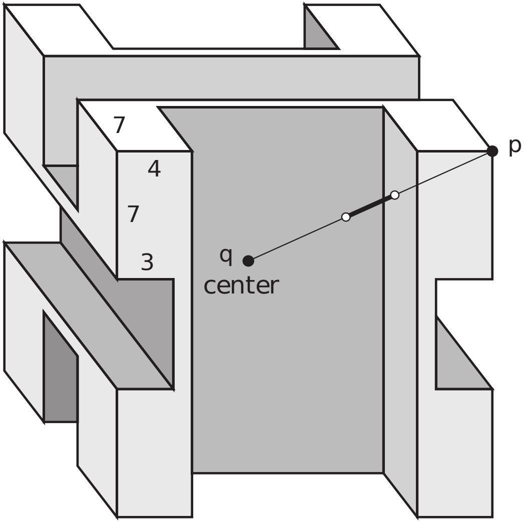
Háromszögelés

Schönhardt példája



Minden csúcsban őr

Octoplex $20 \times 20 \times 20$ méretű kockában



Itt a vége!

Itt a vége!

Köszönöm a figyelmet!