

Matekos kirándulás, Fehér-kút, 2011. október 20-23.

1. Léteznek-e olyan a , b irracionális számok, melyekre a^b racionális?
2. A sík pontjait szeretnénk kiszínezni úgy, hogy bármely két egymástól egységnyi távolságra lévő pont színe különböző legyen. Elegendő-e három szín?
3. Adott egy origó végpontú félegyenes és 4 különböző egész koordinátájú pontjában egy-egy korong. Ketten a következő játékot játsszák: a soron következő játékos egy tetszőleges korongot eltol az origó felé egy egész koordinátájú pontba (legfeljebb az előtte lévő korong utániba). Az veszít aki nem tud lépni. Hogyan kell játszani? (Mi a helyzet n korong esetén?)
4. Egy szigeten két különböző vallást gyakorolnak és az itt élők között már jól kialakult kapcsolati háló van, új ismeretségeket nem kötnek. A lakók úgy gondolják, hogy az ismerőseik okos emberek lehetnek, ezért ha van egy kis szabad idejük, megszámozzák, hogy az ismerőseik között melyik vallás hívői hányan vannak és amennyiben kevesebben vannak a velük azonos vallást gyakorlók, akkor áttérnek a másik hitre. Mutassuk meg, hogy egy idő után egyensúlyi helyzet alakul ki, azaz senki sem fog váltani!
5. Mutassuk meg, hogy létezik a természetes számok részhalmazaiából álló kontinuum számosságú lánc (azaz olyan halmazrendszer, melynek bármely két $A, B \subset \mathbb{N}$ elemére $A \subset B$ vagy $B \subset A$)!
6. Mutassuk meg, hogy $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$!
7. Egy szigeten -ahol mindenki pogány- a part mentén körbe 26 falu helyezkedik el. Az idők folyamán 26 hittérítő érkezik a szigetre, mégpedig oly módon, hogy a különböző térítők különböző falvakba érkeznek először, majd mindegyikük az óramutató járásával ellentétes irányban halad sorra a falvakon. Ha egy hittérítő pogány faluba érkezik, akkor az egész falu felveszi a térítő vallását, azonban ha olyan faluba érkezik, ahol nem pogányok laknak, akkor megszűnik és a faluban lakók ismét pogányok lesznek. Világos, hogy mi lesz a hittérítők sorsa, a kérdés, hogy hány vallásos falu lesz végül?