2014.05.20. Kalkulus I./ Matematika 1. NÉV:..................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{2n^2-5} = \dfrac{3}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n+1} - \sqrt{n^2+3n-4}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-5}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \sqrt{u} \ln u \, du, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 \frac{2t-3}{1-t^2} dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növekvő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható $a = 3$ –ban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek a–ban helyi maximuma van. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.05.27. Kalkulus I./ Matematika 1. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{3}$ értékét. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n} - 4^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} \frac{3}{y^2 - 4} dy , \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi} \cos^2 z \sin z dz , \qquad \text{(iii)} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^{2x}} dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növő az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$. *5pt*

(v) Az E korlátos számhalmaz infimuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.06.03. Kalkulus I./Matematika 1. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3,\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad (n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértéket: *5pt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{3n-4}\right)^{2n-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 t^3 \ln t dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \sin z \cos z dz, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{u+1}{u^2-u-6} du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény deriválható a -3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény folytonos az 1 pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.06.10. Kalkulus I./Matematika 1. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ deriváltját az $x_0 = -1$ helyen. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n - 5^n + 4^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{2v+3}{v^2+2v+2} dv, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty xe^{-x^2} dx, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \ln z dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény konvex az I intervallumon. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.06.17. Kalkulus I./Matematika 1. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+1}$ sorozatot. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-3n}{\sqrt{n+2}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+5}\right).$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} u\cos u\,du, \qquad \text{(iii)} \int_3^{\infty} \frac{2y+3}{y^2-y-2}\,dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenessel közelíthető az 1 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény korlátos az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle felső integrál (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.06.24. Kalkulus I./Matematika 1. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ függvénynek az $x_0 = -1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1} - 5^n}{4^{3n+1}}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)}\ \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{ctg} z\, dz, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^{\infty} \frac{x}{e^{3x}} dx, \qquad \text{(iii)}\ \int_0^1 \frac{3}{v^2 - 4v + 4} dv.$$

Segédlet:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény differenciálható $x_0 = 2$ –ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.07.01. Kalkulus I./ Matematika 1. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{3}$ értékét. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n} - 4^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{u+1}{u^2 - u - 6} du\ , \qquad \text{(ii)} \int_0^\pi \cos^2 z \sin z dz\ , \qquad \text{(iii)} \int_0^1 t^3 \ln t dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növő az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**