2014.12.09. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*
2. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + e}{3 + n} = \infty$. *10pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszet, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/2} x\cos 2x \; dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} ue^{-u^2} \; du, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{t^3 - 1}{t + 2} \; dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az f függvény monoton nő $[a, b]$–n. *5pt*

(iii) Az $f(x)$–nek az $x = 2$ pont kritikus pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Integrálfüggvény. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.12.16. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Lineáris transzformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = e^{2-3x}$ függvényt. *7pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ függvény szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \, dt, \qquad \text{(ii)} \int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{-s/2} \, ds, \qquad \text{(iii)} \int_0^2 \frac{2}{x^2-1} \, dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) A korlátos E számhalmaz supremuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.12.23. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ függvény deriváltját az $x = -2$ helyen. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - \pi} - \sqrt{n^2 - 2n}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\ln^2 x$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{ds}{s^2 - 2s + 2}, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2 - 2t} dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A 3 korlátja az $\{a_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(ii) $f(x)$ konvex $[-1, 2]$–n. *5pt*

(iii) A korlátos E számhalmaz infimuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.12.23. Kalkulus I. NÉV:..................................

B csoport EHA:..................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5}{n^2+n+3} = 2.$ *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, továbbá becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 v^2(3+5v^3)^{12}\, dv, \qquad \text{(ii)} \int_{-2}^{-1} \frac{du}{u^3+u^2}.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökken. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható az 1 pontban. *5pt*

(iii) A $\{b_n\}$ sorozat részsorozata az $\{a_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$. *5pt*

(v) A Lagrange–féle maradéktag. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.06. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 1,\ a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n - 3 \cdot 5^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt\ , \qquad \text{(ii)} \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az E számhalmaznak a -2 supremuma. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek konkáv a $[3,5]$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.06. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - e^2 + 2x}$ függvénynek az $x = e$ pontba húzott érintőegyenesének az egyenletét. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{5^n + n^3}{\pi - 2^{3n}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 1} \frac{1 - x^3}{x^2 - 1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3\sqrt{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 - 6x + 9}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^e s \ln s \, ds, \qquad \text{(iii)} \int_2^3 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2 - 4}}\, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergál -2–höz. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvénynek helyi maximuma van 1–ben. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a c pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos a $[-2, 3]$–on. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.13. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - n + 1}{3 - n + 2n^2} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{1 - \sqrt[n]{9}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{e^x(1-x)}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_2^3 \frac{u^3 + u + 1}{u^2 - 1}\, du, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty v e^{1-v^2}\, dv\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 3. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ szigorúan monoton csökken a $[0, 2]$–on. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van az $x = -2$ helyen. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az integrálható $f(x)$ függvény integrálközepe a $[c, d]$–on. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.13. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-3}{3n-11}$ sorozatot. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n-\sqrt[3]{n^4+3}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^{n+3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi} p \sin p \; dp, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^{0} t^2(t^3+1)^7 \; dt, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{y+1}{\sqrt{y}} \; dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \; (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. *5pt*

(ii) A -3 alsó korlátja $f(x)$–nek. *5pt*

(iii) Az E halmaz megszámlálhatóan végtelen. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle alsó integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 5,\ a_n = \dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *12pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[7]{2-x}$ függvénynek az $a = \beta$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln x^2$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 (\lambda+1)e^{-\lambda x}\ dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{2}{y^2+6y+9}\ dy, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 t\sin(t+2)\ dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konvex az $[1,5]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Lineáris transzformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = \ln(3-2x)$ függvényt. *5pt*
2. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3}{n-2n^2} = -\dfrac{1}{2}$. *10pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/4} \sin^2 t \; dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{y^3+1}{2-y}\; dy, \qquad \text{(iii)} \int_1^\infty \frac{z+2}{z^2+2z+2}\; dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az E halmaznak a 3 infimuma. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi minimuma van $x = 2$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Cauchy–féle maradéktag. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.27. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2+4}{3-2n}$ sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ függvény szélsőértékeit a $[0,1]$ halmazon. *5pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x - \sqrt{x^2-4}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{3}{2z^2+3z+1}\,dz, \qquad \text{(ii)} \int_e^\infty \frac{1}{u\ln^2 u}\,du, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{v^2+v-2\sqrt{v}}{\sqrt{v}}\,dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A -1 szám felső korlátja az (a_n) sorozatnak. *5pt*

(ii) A 2 szám torlódási pontja az (a_n) sorozatnak. *5pt*

(iii) f folytonos a $[-2, 3)$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.27. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 5,\ a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}\ \ (n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3\cdot 2^n + 2\cdot 3^{n+1}}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{1-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x}\ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^{\pi/2} (t+1)\cos t\ dt, \qquad \text{(ii)}\ \int_4^{\infty} \frac{z-2}{\sqrt{z^2-4z+3}}\ dz, \qquad \text{(iii)}\ \int_1^2 \frac{2y^2+y}{1-2y}\ dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos a 2 pontban. *5pt*

(iii) $f(x)$ lineárisan approximálható a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az E számhalmaz felsőhatár–tulajdonságú. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**