2013.12.10. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ deriváltját az $x_0 = -1$ helyen. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n - 5^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^n.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty x e^{-3x}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_e^{e^2} \frac{1}{v\ln^2 v}\,dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke ∞. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.12.17. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3,\ a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1}\right), \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5^n - (-1)^n}{3^n - 4\cdot 2^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\cdot e^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^1 \sqrt[3]{t}\ln t\,dt, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^1 \frac{1+4u}{u^2+1}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény folytonos az 1 pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz infimuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.07. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ függvénynek az $x_0 = -1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}-1}{\sqrt[3]{n^4-2n+3}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-n}{3n+4}\right)^{2n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\sqrt{\pi}} 3u \sin u^2 du, \qquad \text{(ii)} \int_2^{\infty} \frac{3}{v^2+v-2} dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke -1. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.07. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+1}{1-3n+2n^2} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{n^2+3n+1}\right), \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin\frac{2}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x+2-3\sqrt[3]{(x+2)^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^3 \frac{y+1}{y^2-y-2}dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konvex az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.14. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n}-3^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+2x-1}\right).$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \cdot \ln^{2/3} x$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/2} 3u\sin 2u\; du, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} xe^{-x^2}\; dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény korlátos az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -3$. *5pt*

(v) Darboux-féle felső integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.14. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n+1}{n^2-3} = 2.$ *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27}-1}{\sqrt[n]{9}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{4x}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{-2x/3}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^3 \frac{t+2}{\sqrt[3]{t^2+4t}}\, dt, \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{s-5}{s-3}\, ds.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat részsorozata. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek az $a = -2$ pontban minimuma van. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálközepe $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.21. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2,\ a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 1}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n-2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{e^x(x-1)}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^e \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1+z}{1-z^2} dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konkáv az $[a, b]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ intervallum egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.21. Kalkulus I. NÉV:..................................

B csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = x\sqrt{x}$ deriváltját az $x_0 = 2$ helyen. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 4^n + 3^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} 3n^2 \sin\frac{5}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \ln|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{3u}{e^{2u}} du, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{z-1}{z^2+2z+2} dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke $-\infty$. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi minimma van -3–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.28. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{2n^2-1} = \frac{3}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2+3n-1}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt, \qquad \text{(ii)} \int_1^{\infty} \frac{5}{u^2+3}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek a–ban helyi minimuma van. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.28. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{3/2}$ értékét és a hiba nagyságát. *10pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[n]{2}}{1-\sqrt[n]{8}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-4}\right)^{1+2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z \operatorname{arctg} z dz\ , \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható az 1 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növő az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az E korlátos számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**