2012.12.11. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{3n-5} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{4}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+5}\right)^{-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z \ln z dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{t}{t^2+2t+2} dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konvex $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.12.18. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2$ $a_n = \sqrt{5a_{n-1} - 4}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+3n-2}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n-3^n+2^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2 + \sqrt{\dfrac{x^3}{x-6}}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty 2xe^{-3x}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{u+1}{u^2+1}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény folytonos a 3 pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz infimuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.08. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = x \cdot e^{-x^2-x}$ függvénynek az $x = -1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2+3n+1} - \sqrt[3]{n^2+1}), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{5n-1}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\ln^2|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt[3]{4-t^2}}dt, \qquad \text{(ii)} \int_{1}^{3} \frac{2v-1}{v^2+v-6}dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 2. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 4 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.08. Kalkulus I. NÉV:..................................

B csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint es formálisan is határozzuk meg az $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$ deriváltját az $a=1$ helyen. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n}-3^n},\qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x)=\dfrac{x}{e^x(x-1)}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_1^2\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx,\qquad \text{(ii)}\ \int_0^\infty ye^{-y^2}dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1),\qquad \int\frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int\cos x dx=\sin x+C,\qquad \int\sin x dx=-\cos x+C,\qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+C,\qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,\qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\qquad \int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.15. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(1+x)$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli negyedrendű Taylor–féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\ln 2$ értékét és a hiba nagyságát. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+2n}{2n+5}\right)^{1-n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 5x.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx, \qquad \text{(ii)} \int_{-3}^{-2} \frac{1+2t}{1-t^2}dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az I intervallumon. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény a ponthoz tartozó n–edik Cauchy–féle maradéktagja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.15. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{3n^2-4}{2n^2-1}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n + (-1)^n}{3\cdot 4^n - 5^n}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right).$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-2x/3}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^{\pi} (s-1)\cos(s^2-2s)ds, \qquad \text{(ii)}\ \int_3^{\infty} \frac{z+2}{z^2-z-2}\ dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $f(x)$ függvény monoton növő az I intervallumon. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $x = -4$ pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény a ponthoz tartozó n-edik Lagrange-féle maradéktagja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+2}{1+5n-2n^2} = -\dfrac{1}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x+1}\ln(x^2+x)$ függvénynek az $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x+2-3\sqrt[3]{(x+2)^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{1-u}{u^2+1}\,du, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{1}{z\ln^2 z}\,dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat részsorozata. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konkáv az $[a,b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$. *5pt*

(v) Darboux-féle alsó integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli negyedrendű Taylor–féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét és a hiba nagyságát. *10pt*

2. Határozzuk meg $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ –nek a $[-2, 1]$ zárt intervallumon fölvett szélsőértékeit. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^{2/3} x$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{t+4}{t^2-4t+4}\, dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 \frac{4s+2}{\sqrt{s^2+s+1}}\, ds.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek az $a = -1$ pontban minimuma van. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálközepe $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.29. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^2+2}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[n]{2}}{1-\sqrt[n]{4}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+3}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{z}{e^z} dz, \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{u+1}{\sqrt[5]{u^2+2u}} du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $f(x)$ függvény korlátos $[a, b]$–n. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $a = 3$ pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi maximuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.01.29. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-5n+1}{2n^2+3} = \dfrac{3}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2}{1-5n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n-3^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt{t}\ln t\,dt\ , \qquad \text{(ii)} \int_2^3 \frac{z}{1-z^2}dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 1. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény folytonos -3–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**