2019.01.22. Kalkulus I. NÉV:......................................

KÓD:......................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x^2$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor polinomját, és segítségével becsüljük meg $\sin 2$ értékét. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+5} - \sqrt{4n-2}\right) \;, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-5}{3n+1}\right)^{1-2n} \;.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+2)^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\infty} 3xe^{1-x^2}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^{0} \frac{2q^3-1}{3q-2}\, dq, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{\sin t}{\cos^3 t}\, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) Az $f(t)$ függvény egyenletesen folytonos az $[1, 5]$ intervallumon. *5pt*

(iii) A $g(y)$ függvény differenciálható $a = -3$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = -1$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!