2019.01.15. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 4, \quad a_n = \sqrt{6a_{n-1} - 5}$ rekurzív sorozatot. *8pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = xe^{-x}$ függvény szélsőértékét a $[0, 2]$ zárt intervallumon. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\ dx\ , \qquad (b) \quad \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\ dx\ , \qquad (c) \quad \int_0^{1/2} 4t\sqrt{4t^2 - 1}\ dt\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{b_n\}$ sorozat felső korlátja a -4. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan konvex $[3, 5]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \infty$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!