2017.12.12. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Adjuk meg a $b_n = \dfrac{3n-7}{9-2n}$ sorozat infimumát, szuprémumát. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2-n-3}\right)\ , \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{2n+1}\right)^{3-2n} .$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3\sqrt{x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_{-1}^{1}\frac{z^2}{\sqrt[4]{z^3+9}}\,dz\ , \qquad (b) \quad \int_{-\infty}^{0}\frac{3}{2v^2+1}\,dv\ , \qquad (c) \quad \int_{0}^{2}\frac{t-1}{t^2-4}\,dt\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = -2$ pontban. *5pt*

(iii) g–nek helyi minimuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -3^+} h(x) = -1$. *5pt*

(v) A korlátos D számhalmaz szuprémuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2017.12.19. Kalkulus I. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ függvény deriváltját az $x_0 = -1$ helyen. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \sqrt[n]{7^n - 3^n}\ , \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-5}{3n+1}\right)^{3+n} .$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln|x|$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_e^\infty \frac{1}{z\ln^3 z}\, dz\ , \qquad (b) \quad \int_{-1}^0 ve^{2-3v}\, dv\ , \qquad (c) \quad \int_0^2 \frac{t+1}{t^2-4t}\, dt\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 3$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan monoton növő $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 4$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.02. Kalkulus I. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor polinomját, és segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n^2+2}}{2n+5}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{5n-3}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(a)} \int_{-\pi/2}^{\pi} z\cos(3z-2)\ dz, \qquad \text{(b)} \int_0^3 \frac{1-4x}{3x+2}\ dx, \qquad \text{(c)} \int_0^\infty e^{-u/2}\ du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A (z_n) sorozat konvergens. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = -2$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan konvex $[-1, 2]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = 2$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.09. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2-1}$ függvény $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenletét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n+1} - n^5}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27} - \sqrt[n]{9}}{1 - \sqrt[n]{9}}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty 3xe^{1-x^2}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{2q+5}{q^2-4q+4}\, dq, \qquad \text{(iii)} \int_1^e \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) f–nek helyi minimuma van $a = -2$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.16. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+3)^3$ függvény szélsőértékét a $[-4, 1]$ zárt intervallumon. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}-n}{\sqrt[5]{n^3-n^4+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z\ln(1+2z)\ dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\ dx, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{1-u}}\ du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke -2. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenessel közelíthető a 2 pontban. *5pt*

(iii) f monoton csökkenő $[1, 4]$–en. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 4} z(x) = \infty$. *5pt*

(v) Integrálfüggvény (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.23. Kalkulus I. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{3n^2-5} = \dfrac{1}{3}$. *8pt*
2. A tanult módon vizsgáljuk az alábbi rekurzív sorozatot: $a_1 = 3\ , \quad 6a_n = a_{n-1}^2 + 8 \ \ (n > 1)\,.$ *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{0} \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\,dz, \qquad \text{(ii)} \int_{1}^{\infty} \frac{5}{x^2+6}\,dx, \qquad \text{(iii)} \int_{0}^{\pi/4} (3y-1)\sin 2y\,dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $\{x_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

(iii) f szigorúan konkáv az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 3$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.30.	Kalkulus I.	NÉV:.....................................
	A csoport	KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2}{(2-x)^2}$ függvény $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenletét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+n^4}{n-n^2+4n^3}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{2n-3}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-1/x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{2x}{e^{5x-1}}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 \frac{2y-1}{y^2-2y-3}\,dy, \qquad \text{(iii)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) 5 torlódási pontja az (a_n) sorozatnak. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $[1,3)$ intervallumon. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos $[3,5]$–ön. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{t\to 2^+} \phi(t) = 4$. *5pt*

(v) $f(x)$–nek az $x = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor–polinomja. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.05.29. Kalkulus I. / Matematika 1. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{x}{2}}$ függvény deriváltját az $x_0 = 2$ helyen. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n} - 4^n}{5^{n+1} - 3^{2n} + 1} \,, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt[n]{25}}{\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{25}} \,.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_0^1 x^2 \ln x \; dx \,, \qquad (b) \quad \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 y \sin y \; dy \,, \qquad (c) \quad \int_2^3 \frac{1}{1-x^2} \; dx \,.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \; (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \,.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alsó korlátja 3. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = -2$ pontban. *5pt*

(iii) g–nek helyi minimuma van y_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = 2$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.06.05. Kalkulus I. / Matematika 1. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$ függvény $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenletét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \sqrt[n]{7^n - 5^n + 2}\ , \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n^3 + 1}{\sqrt[4]{2n^3 + 6n^2}}\ .$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_0^1 (2x-1)\ln 3x \ dx\ , \qquad (b) \quad \int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+8}}\ dx\ , \qquad (c) \quad \int_1^\infty \frac{1}{t^2+5}\ dt\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan monoton csökkenő $[c, d]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -3$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.06.19. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2-5}{3n-4}$ sorozatot. Adjuk meg a sorozat infimumát, szuprémumát is. *8pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3(x-5)^2$ függvény szélsőértékét a $[-1,4]$ zárt intervallumon. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(a)} \int_0^3 (1-2z)e^{-3z}\, dz, \qquad \text{(b)} \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x}\, dx, \qquad \text{(c)} \int_{-2}^0 \frac{1-x}{x^2-x-6}\, dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{b_n\}$ sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = 4$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan konvex a $[-3, 1]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 2$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.06.26. Kalkulus I. / Matematika 1. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor polinomját, és segítségével becsüljük meg $\sqrt{2}$ értékét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2-3n+1}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-4}{3n+7}\right)^{1-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/2} (3y+1)\sin y \; dy, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} 3xe^{1-x^2} \; dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+4x+4} \; dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) g–nek helyi minimuma van $b = -4$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.07.03. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+3}{n^2+5n} = \infty$. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{27}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^{1-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^e \sqrt{x}\ln x\ dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{x+3}{(6x+x^2)^3}\ dx, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{x+3}{5x+x^2}\ dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat részsorozata. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos a 2 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő $[-2, 3]$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 4} z(x) = \infty$. *5pt*

(v) A korlátos H halmaz szuprémuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!